

COURS ET EXERCICES DE MATHEMATIQUES PARTIE 2 1998-2011

2 PC
Deuxième semestre
Version 2011

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

Cours
Exercice

FORMATION

Auteur de la Ressource Pédagogique
PICQ Martine

INSA LYON



MATHEMATIQUES

Cours et exercices de Mathématiques
Deuxième année- second semestre
1998-2011

martine.picq@insa-lyon.fr

Ce document est contitué de diverses notes, des exercices et de quelques sujets d'examens qui accompagnent un cours de mathématiques donné en seconde année de premier cycle à l'INSA de Lyon. Toutes les remarques permettant d'améliorer ce document seront bienvenues.

Table des matières

Chapitre 6

FORMES BILINEAIRES SYMETRIQUES

Sommaire

6.1 COURS

6.1.1 Introduction

6.1.1.1 Résumé

Nous définissons les notions de forme bilinéaire et de forme quadratique sur un espace vectoriel réel puis nous donnons, dans le cas de la dimension finie, l'expression dans une base donnée, en fonction des coordonnées.
Nous étudions ensuite le cas particulier des formes quadratiques définies positives et les formes bilinéaires associées appelées produit scalaire et qui prolongent le produit scalaire "géométrique" que vous connaissez déjà. Nous généralisons alors les notions d'orthogonalité, de projection et donnons le procédé de calcul de base orthonormées de Gram-Schmidt.
Nous montrons enfin le théorème spectral relatif à la diagonalisation des matrices symétriques à coefficients réels et l'appliquons à la réduction d'une forme quadratique définies sur un espace vectoriel de dimension finie. Nous définissons le couple d'entiers, appelé signature de la forme quadratique, qui mesure le "signe" de la forme quadratique au sens où il donne la dimension du plus grand sous-espace sur lequel elle est positive et du plus grand sous-espace sur lequel elle est négative.

6.1.1.2 Positionnement mathématique

Une notion centrale de ce cours est donc la notion de forme quadratique, notion qui est à la base de la géométrie euclidienne, l'exemple le plus connu est le carré scalaire euclidien.

La théorie des formes quadratiques n'est guère développée avant la seconde moitié du XVIIIe siècle. On les rencontre d'une part à propos du développement de Taylor d'une fonction de plusieurs variables (Lagrange 1759), de la théorie des coniques et des quadriques et d'autre part dans les recherches arithmétiques sur les équations diophantiennes.

En réalité la notion de forme quadratique intervient dans toutes les parties des mathématiques, en particulier cette notion est à la base de la géométrie riemannienne où la forme quadratique est infinitésimale. Cette notion est à la base de la théorie des espace de Hilbert où la forme quadratique est définie sur un espace vectoriel de dimension infinie.

6.1.2 Formes bilinéaires symétriques - formes quadratiques

Dans toute la suite E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

6.1.2.1 Forme bilinéaire symétrique

Definition 6.1.

*φ est une **forme bilinéaire** sur E si φ est une application de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ dans $\mathbb{R}$ est linéaire "par rapport à chacune des variables", ce qui signifie :*

$$\forall y \in \mathrm{E}, \forall (\alpha^{'}, \alpha^{''}) \in \mathbb{R}^2 \forall (x^{'}, x^{''}) \in \mathrm{E}^2 \quad \varphi(\alpha^{'} x^{'} + \alpha^{''} x^{''}, y) = \alpha' \varphi(x^{'}, y) + \alpha^{''} \varphi(x^{''}, y)$$
$$\forall x \in \mathrm{E}, \forall (\beta^{'}, \beta^{''}) \in \mathbb{R}^2 \forall (y^{'}, y^{''}) \in \mathrm{E}^2 \quad \varphi(x, \beta^{'} y^{'} + \beta^{''} y^{''}) = \beta^{'} \varphi(x, y^{'}) + \beta^{''} \varphi(x, y^{''})$$

*Une forme bilinéaire sur E est **symétrique** si de plus :*

$$\forall (x, y) \in E \qquad \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

Remarque 6.1.1. Pour montrer la bilinéarité d'une forme symétrique, il suffit de vérifier la linéarité par rapport au premier argument.

Conséquence 1

$$\forall (\alpha^{'}, \alpha^{''}) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (x^{'}, x^{''}) \in \mathrm{E}^2 \quad \forall (\beta^{'}, \beta^{''}) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (y^{'}, y^{''}) \in \mathrm{E}^2$$

$$\varphi(\alpha^{'} x^{'} + \alpha^{''} x^{''}, \beta^{'} y^{'} + \beta^{''} y^{''}) = \alpha^{'} \beta^{'} \varphi(x^{'}, y^{'}) + \alpha^{'} \beta^{''} \varphi(x^{'}, y^{''}) + \alpha^{''} \beta^{'} \varphi(x^{''}, y^{'}) + \alpha^{''} \beta^{''} \varphi(x^{''}, y^{''})$$
$$\varphi(\alpha^{'} x^{'} + \alpha^{''} x^{''}, \beta^{'} x^{'} + \beta^{''} x^{''}) = \alpha^{'} \beta^{'} \varphi(x^{'}, x^{'}) + \alpha^{'} \beta^{''} \varphi(x^{'}, x^{''}) + \alpha^{''} \beta^{'} \varphi(x^{''}, x^{'}) + \alpha^{''} \beta^{''} \varphi(x^{''}, x^{''})$$

Conséquence 2

Si φ est bilinéaire sur E, pour tout élément x de E, l'application
$J_x : y \in \mathrm{E} \longrightarrow J_x(y) = \varphi(x, y) \in \mathbb{R}$ est linéaire.
et pour tout élément y de E, l'application
$J_y : x \in \mathrm{E} \longrightarrow J_y(x) = \varphi(x, y) \in \mathbb{R}$ est linéaire.
Si de plus φ est symétrique alors $J_x = J_y$.

Exemple de référence 6.1.

$$\mathrm{E} = \mathbb{R}^n \qquad \varphi(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n \tag{6.1}$$

où $\mathbb{R}^n$ est rapporté à la base canonique : $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ et $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$

Exemple de référence 6.2.

$$E = \mathbb{R}[X] \qquad \varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt \qquad (6.2)$$

$E = \mathbb{R}_n[X]$ $\qquad \varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ $\qquad \psi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)e^{-t}dt$

6.1.2.2 Forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique

Definition 6.2.

Soit φ est une forme bilinéaire symétrique φ définie sur E, *l'application Q de E dans $\mathbb{R}$ $\forall x \in \mathrm{E} \mapsto Q(x) = \varphi(x,x)$ est appelée la* ***forme quadratique associée à la forme bilinéaire*** *φ.*

Conséquence

Montrer que si Q est la forme quadratique associée à φ, alors on a :

Q(kx) $=$k^{2}Q(x)

Q (x+y) = Q(x) + Q(y)+ 2 φ (x, y)

Q (x+y) + Q (x-y) = 2(Q (x)+ Q (y))

Théorème 6.1 (*Forme polaire de Q*).

Une forme quadratique Q étant donnée sur E *il existe une seule forme bilinéaire symétrique à laquelle Q puisse être associée.*

$$(x,y) \in \mathrm{E}\times\mathrm{E} \longmapsto \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)) = \frac{1}{4}(Q(x+y) - Q(x-y))$$

Definition 6.3.

La forme bilinéaire symétrique associée à Q appelée ***la forme polaire*** *de Q.*

cas de l'exemple de référence (6.1)

$E = \mathbb{R}^n$ rapporté à la base canonique, Q(x)= $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2$ si x=$(x_1,x_2,...,x_n)$.
Montrer l'identité, appelée identité du parallélogramme

$$Q(x+y) + Q(x-y) = 2(Q(x) + Q(y))$$

Interpréter géométriquement cette identité puis vérifier que cette identité est vraie pour toute forme quadratique.

6.1.2.3 Ecriture polynomiale et écriture matricielle d'une forme bilinéaire symétrique en dimension finie

Nous supposons ici que E est un espace vectoriel réel de dimension finie et nous donnons deux bases de E, $\mathcal{B}$: $(e_1, e_2, ..., e_n)$, et $\mathcal{B}'$: $(e'_1, e'_2, ..., e'_n)$.

$$x \in \mathrm{E} \quad x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i \; = \sum_{i=1}^{i=n} x'_i e'_i \qquad y \in \mathrm{E} \quad y = \sum_{i=1}^{i=n} y_i e_i \; = \sum_{i=1}^{i=n} y'_i e'_i$$

$$\mathrm{X}= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathrm{X'}= \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \mathrm{Y}= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \mathrm{Y'}= \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

φ forme bilinéaire sur E

Théorème 6.2 (*Ecriture polynomiale de* φ).

Une forme bilinéaire est une application qui s'écrit en fonction des coordonnées $(x_i)_{1\leq i \leq n}$ *et* $(y_i)_{1\leq i \leq n}$ *des vecteurs* x *et* y *dans une base* $\mathcal{B}$ *sous la forme :*

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j=1}^{i,j=n} a_{i,j} x_i y_j \quad \text{où} \quad a_{i,j} = \varphi(e_i, e_j) \tag{6.3}$$

Si φ *est symétrique*

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{i,i} x_i y_i + \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j}(x_i y_j + x_j y_i)$$

démonstration.

Vérifier que 6.3 définit bien une forme bilinéaire et que $a_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$. Réciproquement montrer que si la forme φ est bilinéaire alors, si $a_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$:

$$x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^{i=n} y_i e_i \Rightarrow \varphi(x, y) = \sum_{i=1,j=1}^{i=n,j=n} a_{i,j} x_i y_j$$

Compte tenu de $a_{i,j} = a_{j,i}$ on écrit :

$$\sum_{i=1,j=1,i\neq j}^{i=n,j=n} a_{i,j} x_i y_j = \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j}(x_i y_j + x_j y_i)$$

□

Exemple de référence (6.2)

On suppose $E = \mathbb{R}_2[X]$ rapporté à la base canonique (1,X,X^2). Vérifier que la forme polynomiale de φ définie dans l'exemple (6.2) s'écrit en fonction des coordonnées (a_0, a_1, a_2) et (b_0, b_1, b_2) de P et Q par :

$$\varphi(P,Q) = a_0b_0 + \frac{1}{2}(a_0b_1 + a_1b_0) + \frac{1}{3}(a_0b_2 + a_1b_1 + a_0b_2) + \frac{1}{4}(a_1b_2 + a_2b_1) + \frac{1}{5}(a_2b_2)$$

Théorème 6.3 (*Ecriture matricielle d'une forme bilinéaire*).

Une forme bilinéaire φ est caractérisée de manière unique par la matrice carrée A=$(a_{ij} = \varphi(e_i, e_j))_{1\leq i\leq j\leq n}$. Si X et Y sont les matrices colonnes des coordonnées de x et de y dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ alors

$$\varphi(x,y) = {}^t XAY \quad \text{où} \quad A = (a_{ij} = \varphi(e_i, e_j))$$

Definition 6.4.

*A est appelée la **matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$** de E.*

$$A = \begin{pmatrix} \varphi(e_1,e_1) & \dots & \varphi(e_1,e_j) & \dots & \varphi(e_1,e_n) \\ \varphi(e_2,e_1) & \dots & \varphi(e_2,e_j) & \dots & \varphi(e_2,e_n) \\ & & \vdots & & \\ \varphi(e_i,e_1) & \dots & \varphi(e_i,e_j) & \dots & \varphi(e_i,e_n) \\ & & \vdots & & \\ \varphi(e_n,e_1) & \dots & \varphi(e_n,e_j) & \dots & \varphi(e_n,e_n) \end{pmatrix}$$

Théorème 6.4.

La forme bilinéaire φ est symétrique si et seulement si sa matrice est symétrique

Exemple de référence (6.2)

On suppose $E = \mathbb{R}_2[X]$ rapporté à la base canonique (1,X,X^2). Vérifier que la matrice A de φ est la matrice carrée (3,3) de coefficients $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$.

Théorème 6.5 (*Changement de base*).

Soient $\mathcal{B}$et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et A la matrice de l'application bilinéaire φ dans (E,$\mathcal{B}$) . Alors la matrice de l'application bilinéaire φ dans (E,$\mathcal{B}'$) est $A' = {}^tPAP$ où P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

démonstration.

$\varphi(x,y) = {}^t XAY = {}^t (PX')A(PY') = {}^t X'({}^tPAP)Y'$ □

6.1.2.4 Ecriture polynomiale et matrice d'une forme quadratique en dimension finie

Nous supposons toujours que E est un espace vectoriel réel de dimension finie et que $\mathcal{B}$: $(e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}'$: $(e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ sont des bases de E.

Théorème 6.6 (*polynôme homogène de degré 2...*).

Une forme quadratique Q est une application de E dans $\mathbb{R}$ telle que $Q(x)$ s'exprime, dans une base $\mathcal{B}$ quelconque de E, sous la forme d'un polynôme homogène de degré 2 des coordonnées $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ du vecteur x

démonstration.
Soit Q est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire φ, selon le théorème (6.4) et avec les notations de ce théorème :

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ dans la base } \mathcal{B}$$

$$x \longrightarrow \varphi(x, y) == \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i y_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}(x_i y_j + x_j y_i)$$

$$x \longrightarrow Q(x) = \varphi(x, x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_{i,j} x_i x_j$$

□

Proposition 1. *règle du dédoublement*
Si la forme quadratique Q est définie par le polynôme

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c_i x_i^2} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{c_{i,j} x_i x_j}$$

la forme polaire φ de Q est définie par le polynôme :

$$\varphi(x, y) = \sum \mathbf{c_i x_i y_i} + \sum \mathbf{c_{i,j} \frac{x_i y_j + x_j y_i}{2}}$$

Definition 6.5.

*Par définition, la **matrice** d'une forme quadratique Q dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice de la forme polaire associée à Q dans cette base.*

Conséquences

- La matrice d'une forme quadratique est symétrique
- Q(x)= ^{t}XAX, X matrice colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$
- Si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}$', la matrice de Q dans la base $\mathcal{B}$' est ^{t}PAP .

6.1.3 Orthogonalité

Soit Q une forme quadratique sur un espace vectoriel réel E et φ sa forme polaire.

6.1.3.1 Définition

Definition 6.6.

Deux vecteurs *x et y de E sont* ***orthogonaux***[a] *si $\varphi(x, y) = 0$.*
Une ***base*** *de E, une* ***famille*** *de vecteurs de E est dite* ***orthogonale*** *dans (E, Q) si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux* [b]

[a] Si plusieurs formes quadratiques sont données, on précisera dans (E, Q)
[b] $(e_i)_{i\in I}$ orthogonale si $\forall (i, j) \in I \times I \quad i \neq j \Longrightarrow \varphi(e_i, e_j) = 0$

Remarque 6.1.2.
Dans (E, Q), le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de E

Exemple de référence 6.3. *qui complète l'exemple (6.1).*

$$\mathrm{E} = \mathbb{R}^n \qquad \varphi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \tag{6.4}$$

La base canonique est orthogonale

Exemple de référence 6.4. *() qui complète l'exemple (6.2).*

$$\mathrm{E} = (\mathcal{C}[0, 1], \mathbb{R}) \qquad \varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt \tag{6.5}$$

La famille $\big((\sin 2p\pi x)_{p\in\mathbb{N}}, (\cos 2k\pi x)_{k\in\mathbb{N}}\big)$ est orthogonale.

Théorème 6.7. *relation de Pythagore*

Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux dans (E, Q) si et seulement si

$$Q(x) + Q(y) = Q(x + y).$$

Exemple 6.1.1. Ecrire une généralisation du théorème de Pythagore pour n vecteurs deux à deux orthogonaux.

Théorème 6.8.

L'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à un sous-ensemble A de E est un sous-espace vectoriel de E, noté $\mathrm{A}^\perp$.
De plus $\mathrm{vect}(\mathrm{A})^\perp = \mathrm{A}^\perp$

6.1.3.2 Projection sur une droite vectorielle

Proposition 2.
Soit v_1 un vecteur de E tel que $Q(v_1) \neq 0$ alors :

$$E = vect(v_1) \oplus vect(v_1)^{\perp}.$$

Autrement dit, tout vecteur x de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur colinéaire à v_1 et d'un vecteur orthogonal à v_1 :

$$x = p_{v_1}(x) + y \qquad p_{v_1}(x) = \lambda v_1 \quad et \quad \varphi(v_1, y) = 0 \tag{6.6}$$

Definition 6.7. ***projection orthogonale sur une droite vectorielle***

*Supposons $Q(v_1) \neq 0$, pour tout vecteur x, le vecteur $p_{v_1}(x)$ défini par l'égalité (6.6) ci-dessus est appelé la **projection orthogonale** de x **sur la droite vectorielle** engendrée par v_1.*

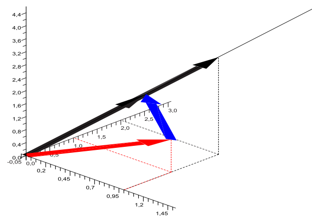
Théorème 6.9. ***projection orthogonale sur une droite vectorielle***

Supposons $Q(v_1) \neq 0$, pour tout vecteur x, la projection orthogonale de x sur la droite vectorielle engendrée par v_1 est le vecteur $p_{v_1}(x)$ avec :

$$p_{v_1}(x) = \frac{\varphi(x, v_1)}{\varphi(v_1, v_1)} v_1 = \frac{\varphi(x, v_1)}{Q(v_1)} v_1$$

exemple de référence 6.1

Dans $(\mathbb{R}^3, \| \|)$ où $\| x \|^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2$ déterminer la projection orthogonale du vecteur $x = (1, 1, 1)$ sur la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 2, 3)$.



$$p_0(x) = \lambda v_1$$

$$\lambda = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{1^1 + 2^2 + 3^2} = \frac{6}{14}$$

exemple de référence 6.2

Dans $(\mathbb{R}^3[X], \| \|)$ où $\| P \|^2 = \int_0^1 P^2(t)dt$ déterminer la projection orthogonale du vecteur $P = X$ sur la droite vectorielle engendrée par le vecteur $P_0 = 1$.

Conséquence
Supposons E de dimension finie, le théorème (6.9) permet d'établir par récurrence l'existence d'une base $(e'_1, e'_2, \cdots e'_n)$ de E dans laquelle la matrice de φ et de Q soit diagonale. Une telle base est orthogonale dans (E, Q) et si $x = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} x'ie'_i$ alors Q s'exprime sous la forme dite réduite $Q(x) = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} \lambda_i {x'_i}^2$.
Il existe des méthodes permettant d'écrire Q sous forme réduite, mais nous développons dans la dernière partie de ce cours une autre méthode de réduction qui de plus a de bonnes propriétés "géométriques".

6.1.4 Produit scalaire

Soit Q une forme quadratique sur un espace vectoriel réel E et φ sa forme polaire.

6.1.4.1 Définition

Definition 6.8.
*La forme quadratique Q est **positive**, si* $\forall x \in \mathrm{E} \quad 0 \leq Q(x)$
*La forme quadratique Q est **définie positive**, si* $\forall x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\} \quad 0 < Q(x)$.

Q positive est définie positive si et seulement si $Q(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

Definition 6.9.
Une forme bilinéaire symétrique sur E *est un **produit scalaire** sur* E *si la forme quadratique associée est définie positive.*

exemple de référence 6.1
La forme bilinéaire $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \varphi(x,y) = x_1y_1 + x_2\, y_2 + \ldots + x_ny_n$ est un produit scalaire.

exemple de référence 6.2
La forme bilinéaire $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \mapsto \varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire.

6.1.4.2 Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Nous nous plaçons dans tout ce paragraphe dans un espace E **muni d'un produit scalaire** φ associé à la forme quadratique Q.

Théorème 6.10.

Dans un espace muni d'un produit scalaire, toute famille orthogonale formée de vecteurs non nuls est libre.

Definition 6.10. *projection sur un sous-espace vectoriel*

Si[a] E *s'écrit comme somme directe d'un sous-espace vectoriel* F *et de son orthogonal.*

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}.$$

alors tout vecteur x de E *s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$x = p_F(x) + y \quad \text{où} \quad p_F(x) \in \mathrm{F} \quad \text{et} \quad y \in \mathrm{F}^{\perp}$$

On dit que $p_F(x)$ est ***la projection orthogonale de*** *x* ***sur*** F.

[a] Cette propriété est vraie dès que F est de dimension finie

Théorème 6.11. *Sous-espace engendré par p vecteurs orthogonaux*

Etant donnée une famille finie de vecteurs $v_1, \cdots, v_p$ non nuls et deux à deux orthogonaux, E *s'écrit comme somme directe du sous-espace vectoriel* $\mathrm{F} = vect(v_1, \cdots, v_p)$ *et de son orthogonal.*
La projection orthogonale d'un vecteur x de E *sur* F*, est alors la somme des projection de x sur chacune des droites vectorielles engendrées par les v_i :*

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{i=p} p_{v_i}(x) v_i.$$

Théorème 6.12. *Procédé d'orthogonalisation de Schmidt*

Soient k un entier non nul, $(w_1, w_2, \ldots, w_k)$ une famille libre dans E*, il existe une famille $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ de vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux telle que pour tout entier j inférieur à k*

$$vect\ (v_1, v_2, ..., v_j) = vect\ (w_1, w_2, ..., w_j)$$

démonstration.

$$\begin{aligned} v_1 &= w_1 \\ v_2 &= w_2 - p_{v_1}(w_2) = w_2 - \frac{\varphi(w_2, v_1)}{Q(v_1)} v_1 \end{aligned}$$

Si on suppose déterminée une famille de r-1 vecteurs 2 à 2 orthogonaux, qui vérifient la condition

$$1 \leq j \leq r-1 \quad \mathrm{vect}(v_1, v_2, ..., v_j) = \mathrm{vect}(w_1, w_2, ..., w_j)$$

pour obtenir une famille de r vecteurs, on introduit v_r tel que :

$$v_r = \ w_r - \sum_{j=1}^{j=r-1} p_{v_j}(w_r) = \ w_r - \sum_{j=1}^{j=r-1} \frac{\varphi(w_r, v_j)}{Q(v_j)} v_j$$

alors $v_r \neq 0_E$ sinon w_r appartiendrait à $\text{vect}(v_1, v_2, ..., v_{r-1})$.
Pour tout entier i strictement inférieur à r, $\varphi(v_r, v_i) = 0$. $(v_1, v_2, ..., v_{r-1})$ est formée de vecteurs 2 à 2 orthogonaux non nuls.
Cette famille libre de r vecteurs de $\text{vect}(w_1, w_2, ..., w_r)$ en forme une base. On conclut par récurrence. □

Exemple 6.1.2.
Construire à partir de la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, une base orthogonale pour la forme quadratique définie dans l'exemple de référence (6.2)

6.1.4.3 Projection sur un sous-espace de dimension finie

Proposition 3.
E *étant muni d'un produit scalaire, tout sous-espace vectoriel* F *de dimension finie admet une base orthogonale.*

Théorème 6.13. *projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie*

Si F *est un sous-espace vectoriel de dimension finie de* E *alors :*

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}.$$

la projection orthogonale d'un vecteur x de E *sur* F *s'obtient en déterminant une base orthogonale de* F*, par le procédé de Gram-schmidt puis en appliquant le théorème (6.11).*

6.1.4.4 Inégalités

Nous considérons un produit scalaire φ sur un espace vectoriel réel, E, et Q la forme quadratique associée.

Théorème 6.14 (*inégalité de Cauchy-Schwarz*).

1. *Si Q est une forme quadratique positive, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\forall x \in \mathrm{E} \quad \forall y \in \mathrm{E} \qquad | \varphi(x,y) | \leq \sqrt{Q(x)Q(y)}$$

2. *Si Q est une forme quadratique définie positive, l'égalité a lieu si et seulement si x et y sont liés.*

Exemple de référence 6.1 :

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$| \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i | \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} y_i^2}$$

exemple de référence 6.2 :

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$| \int_0^1 f(t)g(t)dt| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt} \sqrt{\int_0^1 g^2(t)dt}.$$

Théorème 6.15 (*inégalité de Minkowski*).

Soit Q une forme quadratique définie positive

1. *On a l'inégalité de Minkowski :*

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{E} \quad \sqrt{Q(x+y)} \leq \sqrt{Q(x)} + \sqrt{Q(y)}$$

2. *L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont positivement liés.*

Definition 6.11.

*Si Q est une forme quadratique Q définie positive. On dit alors que φ, la forme polaire de Q, est un **produit scalaire** et que $\sqrt{Q}$ est la **norme euclidienne** associée.*

Remarque 6.1.3.

Supposons Q définie positive et notons $\|x\| = \sqrt{Q(x)}$, on a :

1. $\forall x \in \mathrm{E} \setminus 0_\mathrm{E} \quad 0 \leq \|x\|$ et $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0_\mathrm{E}$
2. $\forall x \in \mathrm{E} \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \|kx\| = | k | \, \|x\|$
3. $\forall (x,y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{E} \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Nous retrouverons ces propriétés dans une nouvelle généralisation qui fera l'objet du prochain chapitre, la notion de norme sur un espace vectoriel.

6.1.5 Espaces euclidiens

6.1.5.1 Définition

Nous développons ici l'étude des formes quadratiques définies positives en dimension finie, en nous appuyant sur le modèle concret de la géométrie élémentaire dont nous empruntons les notations. E désigne dans toute la suite un espace vectoriel réel de dimension finie n que l'on suppose muni d'une forme quadratique Q définie positive. nous nous donnons une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ base de E, et écrivons $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{i=n} y_i e_i$.

Definition 6.12.

Si E *est un espace vectoriel de* ***dimension finie****, muni d'une forme quadratique* Q *définie positive, on dit alors en se référant au modèle géométrique, que* $(\mathrm{E}, \sqrt{Q})$ *est un* ***espace euclidien****.*

notations

On note généralement $\sqrt{Q} = \| \ \|$. L'espace euclidien est noté $(E, \| \ \|)$

Le produit scalaire est noté $\varphi(x, y) = (\, x \,|\, y \,)$.

6.1.5.2 Bases orthonormées

Definition 6.13.

E *étant muni du produit scalaire* φ *une famille orthogonale formée de vecteurs unitaires de* E *est appelée une* ***famille orthonormée*** *de vecteurs de* E*.*

Théorème 6.16. *expression dans une base orthonormée*

Tout espace euclidien $(\mathrm{E}, \| \ \|)$ *admet une base orthonormée.*

Si $\mathcal{B}$ *est une base orthonormée de* $(\mathrm{E}, \| \ \|)$ *alors :*

$$\forall x \in \mathrm{E} \quad \forall y \in \mathrm{E} \quad (x, y) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 \quad x = \sum_{i=1}^{i=n} (\, x \,|\, e_i \,)\, e_i$$

Théorème 6.17.

$\mathcal{B}$ *est une base orthonormée de* $(\mathrm{E}, \| \ \|)$ *si et seulement si la matrice de la forme quadratique* $\| \ \|^2$ *dans la base* $\mathcal{B}$ *est* I_n

exemple de référence 6.1

La structure euclidienne, appelée canonique, de $\mathbb{R}^n$ définie par $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2$, si x=($x_1$,$x_2$, $\cdots$ x_n) n'est autre que la structure euclidienne telle que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ soit orthonormée.

Les vecteurs e'_1 et e'_2 de $\mathbb{R}^2$, images respectives des vecteurs $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par la rotation de matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ muni de la structure euclidienne canonique.

Remarque 6.1.4.
Pour tout sous-espace vectoriel F : $dimF + dimF^{\perp} = dimE$.
Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée (orthogonale suffit) de E, le sous-espace vectoriel F = vect$(e_1, \cdots, e_r)$ engendré par les r premiers vecteurs de cette base a pour supplémentaire orthogonal $F^{\perp} = vect(e_{r+1}, \cdots, e_n)$.

Théorème 6.18.
La matrice de passage P d'une base orthonormée de l'espace euclidien $(E, \| \|)$ *à une autre base orthonormée de l'espace euclidien* $(E, \| \|)$ *vérifie* ${}^tPP = I_n$.

Definition 6.14.
Une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est ***orthogonale*** *si* ${}^tP\,P = I_n$.

Conséquence
Le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à 1 ou à -1.

Proposition 4. *critère pratique*
Une matrice est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ muni de la structure euclidienne canonique.

démonstration. Soit E'_j la $j^{ème}$ colonne qui représente le vecteur e'_j , la $i^{ème}$ ligne de ${}^tP$ est la matrice ${}^tE'_i$. D'où ${}^tP\,P$ a pour coefficient d'indice (i,j) $a_{i,j} = {}^t E'_i.E'_j = (e'_i, e'_j) = \delta_{i,j}$ □

Exemple 6.1.3. La matrice $J_f(r,\theta,\varphi)$ définie par :

$$J_f(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

est-elle une matrice orthogonale P. Calculer det(P). Calculer la trace de P. Calculer $J_f(r,\theta,\varphi)^{-1}$

6.1.5.3 Réduction d'un endomorphisme symétrique

données
$(E, \| \|)$ un espace euclidien de dimension n [1]
$\mathcal{B}$ une base orthonormée de $(E, \| \|)$.

[1] où (x, y) désigne le produit scalaire des vecteurs x et y

Definition 6.15.

Un endomorphisme u de E *est* ***symétrique*** *(ou* ***autoadjoint****) si :*

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad (\,u(x)\,|\,y\,) \quad = \quad (\,x\,|\,u(y)\,)$$

où $u(x)$ désigne l'image du vecteur x par l'endomorphisme u.

Proposition 5.

Un endomorphisme symétrique de $(\mathrm{E}, \|\,\|)$ *est un endomorphisme représenté dans une base orthonormée de* $(\mathrm{E}, \|\,\|)$ *par une matrice symétrique.*

Théorème 6.19 (*théorème spectral*).

Il existe une base orthonormée de $(\mathrm{E}, \|\,\|)$ *dans laquelle l'endomorphisme symétrique de* $(\mathrm{E}, \|\,\|)$ *est représenté par une matrice diagonale.*

Une matrice symétrique A représente dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ initialement donnée un endomorphisme autoadjoint u[1]

Théorème 6.20 (*forme matricielle du théorème spectral*).

Pour tout matrice symétrique A, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle D telles que

$$A = PDP^{-1} = PD^tP$$

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & \lambda_{r-1} & \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & & \lambda_r & & & \vdots \\ & & & & & 0 & & \vdots \\ & & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \dots & & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

où les valeurs propres $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r\}$ de A sont toutes réelles.
la démonstration s'appuie sur les deux lemmes suivants

Lemme 6.1.

Les valeurs propres d'une matrice symétrique à coefficients réels sont réelles.

démonstration. en utilisant l'écriture matricielle :
Soit λ une racine sur $\mathbb{C}$ du polynôme caractéristique de A et x un vecteur

[1]Nous donnerons une autre démonstration de ce théorème dans le chapitre calcul différentiel, basé sur le théorème des extremas liés

non nul de $\mathbb{C}^n$, vecteur propre de A pour la valeur propre λ, de matrice des coordonnées X :

$$AX = \lambda X \Rightarrow \overline{AX} = \overline{\lambda} \text{ et } A\overline{X} = \overline{\lambda}$$

Nous utilisons un calcul qui généralise la notion de forme quadratique au cas d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$: :

$${}^t\overline{X}(AX) =^t \overline{X}(\lambda X) = \lambda^t\overline{X}X \text{ et } ({}^t\overline{X}A)X = ({}^t\overline{X}^t A)X =^t (A\overline{X})X = \overline{\lambda}^t\overline{X}X$$

Il vient

$$(\overline{\lambda} - \lambda)^t\overline{X}X = 0 \Rightarrow \overline{\lambda} = \lambda$$

□

Lemme 6.2.
Deux vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique de $(\mathrm{E}, \| \|)$ *associés à des valeurs propres distinctes sont des vecteurs orthogonaux de* $(\mathrm{E}, \| \|)$.

démonstration. en utilisant l'écriture matricielle :
Notons A la matrice de l'endomorphisme symétrique u dans une base orthonormée $\mathcal{B}$. Soient X_1 et X_2 les matrices colonnes dans cette base de deux vecteurs propres, x_1 et x_2 pour les valeurs propres λ_1 et λ_2 supposées distinctes. Le produit scalaire des vecteurs x_2 et $u(x_1)$ est :

$${}^tX_2(AX_1) = \lambda_1^t X_2 X_1 \text{ et } ({}^tX_2A)X_1 = ({}^tX_2^t A)X_1 =^t (AX_2)X_1 = \lambda_2^t X_2 X_1.$$

Il vient :

$$(\lambda_2 - \lambda_1)^t X_2 X_1 = 0 \Longrightarrow^t X_2 X_1 = 0$$

.□

Algorithme de diagonalisation orthogonale

1. **Calculer les valeurs propres de la matrice A** :
   – le polynôme caractéristique de A, det(A-tI$_n$)
   – les racines, toutes réelles, de ce polynôme
2. **Déterminer pour chaque sous-espace propre** E_λ
   – une base de E_λ
   – une base orthogonale de E_λ par le procédé de Gram-Schmidt
   – une base orthonormée de E_λ
3. **Ecrire une base orthonormée de** E
   – En réunissant chacune des bases orthonormées des sous-espaces propres [a].

[a] car les vecteurs propres relatifs à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux

Exemple 6.1.4. Réduire dans une base orthonormée de vecteurs propres l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^4$ de matrice A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

solution

1. Recherche des valeurs propres et sous-espaces propres :
   – polynôme caractéristique

$$\triangle(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1+\lambda)^3(3-\lambda)$$

   – valeurs propres -1 et 3.

2. Détermination de E_{-1}, sous-espace propre associé à la valeur propre -1.

$$V = (x,y,z,t) \in \mathrm{E}_{-1} \quad \Leftrightarrow \quad V \in ker(A+I) \quad \Leftrightarrow \quad x+y+z+t=0$$

   Base de E_{-1}

$$\mathrm{E}_{-1} = \{(-y-z-t, y, z, t)/y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathrm{E}_{-1} = \{-y(1,-1,0,0) - z(1,0,-1,0) - t(0,0,1,-1)/y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$$

$$(x,y,z,t) \in E_{-1} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z,t) = -y((1,-1,0,0) - z(1,0,-1,0) - t(1,0,0,-1)$$

   Base orthogonale de E_{-1} par Gram Schmidt
   On part de la base w_1=(1,-1,0,0), w_2=(1,0,-1,0) et w_3=(1,0,0,-1).
   La base orthogonale de E $_{-1}$ est :

$$\begin{array}{llll} \varepsilon_1^* & = (1,-1,0,0) & & \varepsilon_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0) \\ \varepsilon_2^* & = w_2 - \alpha_{21}\varepsilon_1 & \alpha_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} & \varepsilon_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, 0) \\ \varepsilon_3^* & = w_3 - \alpha_{32}\varepsilon_2 - \alpha_{31}\varepsilon_1 & \alpha_{32} = \frac{1}{\sqrt{6}}\ \alpha_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}} & \varepsilon_3 = (\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, -\frac{3}{\sqrt{12}}) \end{array}$$

   Détermination de E $_3$
   V=(x,y,z,t) $\in \mathrm{E}_{-1}$ $\Leftrightarrow$ $V \in$ ker(A-3I) $\Leftrightarrow$ x=y z=t et x=z
   Base orthonormée de E_3

$$\varepsilon_4' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

3. Base orthonormée de $\mathbb{R}^4$

$$\varepsilon'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)\, \varepsilon'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-1,0)\, \varepsilon'_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}(1,1,1,-1)\, \varepsilon'_4 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$$

Matrice orthogonale qui diagonalise A

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Matrice diagonale D=^{t}PAP

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6.1.6 Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ par leur signature

Nous nous donnons un espace euclidien (E, $\| \, \|$) de dimension n et (|) le produit scalaire associé. ($\mathcal{B}$) désigne une base orthonormée de (E,$\| \, \|$). on se donne une forme quadratique Q sur E et φ la forme polaire de Q. A est la matrice de Q dans la base $\mathcal{B}$ et P la matrice de passage de la base ($\mathcal{B}$) à une base orthonormée ($\mathcal{B}'$) de (E, $\| \, \|$) qui selon le théorème spectral(6.20) diagonalise A. $(\mathcal{B}') = (e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ et nous notons x'_i les coordonnées d'un vecteur x dans cette base, $x = \sum_{i=1}^{i=n} x'_i e'_i$

Proposition 6.
La matrice diagonale D définie par $D = P^{-1}AP = ^t PAP$, représente la forme quadratique Q dans la base $(\mathcal{B}')$[1].
$(\mathcal{B}')$ est une base orthogonale dans (E, Q) dans laquelle Q s'exprime donc ***sous forme réduite*** *:*

$$Q(\sum_{i=1}^{i=n} x'_i e'_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i {x'_i}^2 \quad \text{où} \quad \lambda_i = Q(e'_i)$$

Conséquence
Les $\lambda_i \quad 1 \leq i \leq n$ sont les valeurs propres de A comptées avec leur ordre de multiplicité

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & & \dots & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & \vdots \\ & & \lambda_p & \vdots & & & & \\ & & & \lambda_{p+1} & & & & \\ & & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & & \lambda_{p+q} & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \dots & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Definition 6.16.
Notons $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p \, \lambda_{p+1}, ..., \lambda_{p+q} \, \lambda_{p+q+1}, ..., \lambda_n\}$, où les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont strictement positives et les valeurs propres $\lambda_{p+1}, ..., \lambda_{p+q}$ sont strictement négatives, la ***signature de Q*** *est le couple d'entiers positifs (p, q). Autrement dit : $p = card(Sp(A) \cap \mathbb{R}^{+*}$ et $q = card(Sp(A) \cap \mathbb{R}^{-*})$.*

[1] elle est formée de vecteurs propres de A.

Exemple 6.1.5. La signature de la forme quadratique de matrice A étudiée en 6.7 est $(1,3)$.

Conséquence

- Une forme quadratique est définie positive si et seulement si sa signature est (n,0).
- Une forme quadratique est positive si et seulement si sa signature est (m,0) m$\leq$n est positive.

La signature est une forme de mesure de la positivité d'une forme quadratique, elle est intrinsèquement liée à la forme quadratique comme le montre le théorème de Sylvester ci-après :

Théorème 6.21.

Soit (p,q) la signature de Q, p est la plus grande dimension d'un sous espace vectoriel F tel que la forme quadratique $(x \in F \mapsto Q(x))$ soit définie positive et q est la plus grande dimension d'un sous espace vectoriel G tel que la forme quadratique $(x \in G \mapsto -Q(x))$ soit définie positive.

théorème admis

Definition 6.17.

*Le **rang** r d'une forme quadratique Q de signature (p,q) est l'entier p+q*

Remarque 6.1.5.
Le rang d'une forme quadratique Q est égal au rang de la matrice qui représente Q dans l'une quelconque des bases de E.

Exemple 6.1.6.

1. Vérifier que la forme quadratique Q définie sur $\mathbb{R}^4$ par $Q(x,y,z,t) = x^2 - y^2 - z^2 - t^2$ a pour signature (1,3) et pour rang 4.
2. Vérifier $Q(3,2,2,1) = 0$ (on dit que (3,2,2,1) est Q isotrope).
3. Trouver un vecteur v tel que $\forall w \in \mathbb{R}^4 \quad \varphi(v,w) = 0$. (On dit que v appartient au noyau de Q.)

6.2 EXERCICES

6.2.1 formes bilinéaires - formes quadratiques

6.2.1.1 apprentissage du cours

Exercice 6.1.
Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et pour tout entier n supérieur ou égal à 2, soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1. Vérifier que l'application φ définie sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 tP(t)Q(t)dt.$$

   est bilinéaire symétrique.
2. Que vaut $\varphi(X^p, X^q)$
3. Donner la matrice de la restriction de φ à $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ rapporté à la base $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$.

Exercice 6.2.
Déterminer la matrice de la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ rapporté à la base canonique par :
$x = (x_1, x_2)$ $Q(x) = a\, x_1^2 + 2b\, x_1\, x_2 + c\, x_2^2$.

Réponse : $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Exercice 6.3.
Matrice de la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{R}^2$ avec $x=(x_1,x_2)$ et $y=(y_1,y_2)$:

$$\varphi(x, y) = 2x_1y_1 - 3(x_1y_2 + x_2y_1) + x_2y_2.$$

Exercice 6.4.

1. Ecrire la matrice B de la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ rapporté à la base canonique, qui a pour expression polynomiale relativement à cette base :

$$x=(x_1, x_2, x_3) \quad Q(x) = 4\, x_1\, x_2 + 5\, x_2^2$$

2. Donner l'expression polynomiale de la forme quadratique Q_A définie sur $\mathbb{R}^3$ définie par sa matrice A (dans la base canonique)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Trouver la matrice C de la forme quadratique Q_A lorque $\mathbb{R}^3$ est rapporté à la base ((1,1,1), (1,0,0) (0,0,1)).

6.2.1.2 pour aller plus loin

Exercice 6.5.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et E l'espace vectoriel[1] des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

1. Vérifier que l'application de E×E dans $\mathbb{R}$ qui à (A, B) associe $\varphi(A, B) = Tr(AB)$ est bilinéaire symétrique.
2. On suppose que n=2, montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à A associe son déterminant est une forme quadratique. Ecrire sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Que se passe-t-il si n est strictement supérieur à 2 ?

Exercice 6.6.
Vérifier que l'ensemble des formes bilinéaires sur E, espace vectoriel de dimension n, forme un espace vectoriel de dimension n^2

Exercice 6.7. Trouver deux matrices carrées d'ordre 2 distinctes, A et B, telles pour toute matrice colonne X formée de deux lignes, on ait :

$${}^tXAX = {}^tXBX$$

6.2.2 Produit scalaire

6.2.2.1 apprentissage du cours

Exercice 6.8.
Montrer que la forme bilinéaire définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2 - \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$$

est un produit scalaire.
Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ muni de cette structure euclidienne.

[1]aussi noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 6.9.
On choisit $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. L'application bilinéaire symétrique qui à (A, B) associe $\psi(A, B) = Tr(AB)$ définit-elle un produit scalaire. (examiner le cas des matrices antisymétriques) ?
2. Vérifier que l'application de ExE dans $\mathbb{R}$ qui à (A, B) associe $\psi(A, B) = Tr({}^tAB)$ définit un produit scalaire.

Exercice 6.10.
Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la structure euclidienne canonique, déterminer une base orthogonale du plan vectoriel engendré par les vecteurs (1,1,1) et (2,3,4). En déduire une base orthonormée de ce plan vectoriel. Compléter cette base en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6.11.
Soit a un réel donné. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de la structure euclidienne canonique, déterminer l'ensemble $F^\perp$ des vecteurs orthogonaux aux vecteurs (1,a,1,1) et (0,1,0,0). Vérifer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$. Donner une base orthogonale de $F^\perp$.

Exercice 6.12.
Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, $F = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, G l'espace vectoriel des applications continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$, H l'espace vectoriel des applications $\mathcal{C}^1$ par morceaux de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit l'application φ donnée par :

$$\varphi(P, Q) = P(1)Q(1) + P(0)Q(0) + P(-1)Q(-1).$$

   (a) Vérifier que φ est une forme bilinéaire symétrique sur H et donc sur G sur E et sur F.
   (b) φ définit-elle un produit scalaire sur E,sur G ?
   (c) Montrer que φ définit un produit scalaire sur F.
   (d) Ecrire la matrice de φ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $F = \mathbb{R}_2[X]$
   (e) Trouver une base de $F = \mathbb{R}_2[X]$ orthonormée pour ce produit scalaire en utilisant l'algorithme de Gram Schmidt.
2. Soit l'application φ donnée par :

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} |t|P(t)Q(t)dt.$$

(a) Vérifier que φ est une forme bilinéaire symétrique sur G et donc sur F et sur E.

(b) φ définit-elle un produit scalaire sur G,sur E ?

(c) Montrer que φ définit un produit scalaire sur F, sur l'espace vectoriel L des applications $\mathcal{C}^1$ par morceaux de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$?

(d) Ecrire la matrice de φ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $F = \mathbb{R}_2[X]$

(e) Trouver une base de $F = \mathbb{R}_2[X]$ orthonormée pour ce produit scalaire.

Exercice 6.13.

une approximation du sinus par un polynôme de degré 1

On considère un espace vectoriel euclidien E pour une forme quadratique notée $\| \quad \|^2$, associée au produit scalaire $(\,|\,)$. F est un plan vectoriel de E dont on connaît une base orthogonale (v_1, v_2)

1. Vous savez que que la projection orthogonale, $p_F(v)$, d'un vecteur v sur le plan vectoriel F engendré par v_1 et v_2 est égale à la somme des projections orthogonales de v sur les droites vectorielles $vect(v_1)$ et $vect(v_2)$?. Ce résultat subsiste-t-il si l'on ne suppose pas v_1 et v_2 orthogonaux ?
2. Etablir $\forall w \in F \quad \|v - w\|^2 = \|v - p_F(v)\|^2 + \|p_F(v) - w\|^2$. De quelle propriété géométrique s'agit-il ? En déduire que
$$\forall w \in F \quad \|v - p_F(v)\| \leq \|v - w\|$$
3. Appliquer ce résultat lorsque E est le sous-espace vectoriel de dimension finie de $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ engendré par les polynômes de degré 1 et la fonction sinus, muni du produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$: déterminer la projection orthogonale du sinus v ($t \mapsto sint$) sur le plan vectoriel formé des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

Exercice 6.14.

Soit E l'espace vectoriel euclidien des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2 muni du produit scalaire $(\, P \,|\, Q \,) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

1. Montrer que le sous-ensemble F de E formé des polynômes P tels que $P(1) = 0$ est un plan vectoriel de E.
2. Déterminer l'orthogonal de F.
3. Déterminer la projection du polynôme constant 1 sur F.

Exercice 6.15. Soit E l'espace vectoriel des applications f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont 2π-périodiques. E est muni du produit scalaire

$$f \in \mathrm{E} \quad \text{et} \quad g \in \mathrm{E} \longrightarrow (f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(t)g(t)dt$$

où a est un réel donné.

1. Vérifier que ce produit scalaire est bien indépendant du choix du réel a
2. En déduire que pour tout réel a :

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(t)g(t)dt\right]^2 \leq \left[\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f^2(t)dt\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} g^2(t)dt\right]$$

3. Etablir :

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} \mid f(t) \mid dt\right]^2 \leq \left[\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f^2(t)dt\right]$$

4. Vérifier que la famille $\{\cos nx, \sin px)/n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}\}$ est une famille orthogonale de E pour ce produit scalaire.

6.2.2.2 pour aller plus loin

Exercice 6.16.
Soient a_1 ,a_2 ... a_n n nombres réels.
Montrer que l'application Q de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$Q(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} a_i x_i)^2$$

est une forme quadratique.
Ecrire la matrice de cette forme quadratique dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Expliciter la forme polaire de Q.
Montrer en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (p. 36) que si $\| a \|_2 < 1$, la forme quadratique Q est définie positive.

6.2.3 Classification des formes quadratiques

6.2.3.1 apprentissage du cours

Exercice 6.17.

1. Vérifier que la forme quadratique Q_1 définie sur $\mathbb{R}^4$ par Q_1 (x,y,z,t) = x^2-y^2-z^2- t^2 a pour signature (1,3) et pour rang 4. Vérifier que (3,2,2,1) est Q_1 isotrope, c'est à dire que Q_1 (3,2,2,1) = 0.
2. Vérifier que la forme quadratique Q_2 définie sur $\mathbb{R}^4$ par Q_2 (x,y,z,t) = 2xy+2xz+2xt+2yz+2yt+2zt a pour signature (1,3) et pour rang 4. Trouver un vecteur isotrope de Q_2.
3. Vérifier que la forme quadratique Q_3 définie sur $\mathbb{R}^4$ par Q_3 (x,y,z,t) = x^2+y^2+z^2 a pour signature (3,0) et pour rang 3.
4. Trouver un vecteur v du noyau de Q_3 i.e. $\forall$w$\in \mathbb{R}^4\varphi$(v,w)=0. Que vaut le noyau des formes quadratiques Q_1 et Q_2 ?.

Exercice 6.18.
Réduire dans une base orthonormée de vecteurs propres la matrice symétrique A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

Réponse : $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ et $\frac{1}{\sqrt{6}}$(-1,-1,2).

Exercice 6.19.
Ecrire la matrice des formes quadratiques Q définies sur $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ puis déterminer la signature et le rang de ces formes quadratiques :

$$Q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2yz$$
$$Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$
$$Q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + z^2 + 6xt + 6yz$$

6.2.3.2 pour aller plus loin

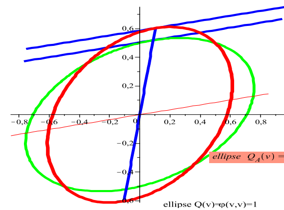
Exercice 6.20.
1. Vérifier que la forme bilinéaire symétrique φ définie pour $u_1 = (x_1, y_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2)$

$$(u_1, u_2) \mapsto \varphi(u_1, u_2) = 3x_1x_2 + 3y_1y_2 - (x_1y_2 + x_2y_1)$$

munit $\mathbb{R}^2$ d'un produit scalaire
2. On note $\| u \|_\varphi$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire, trouver

une base (e_1, e_2) qui soit orthonormée dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^2, \|\quad\|_\varphi)$.
On considère la forme quadratique Q_A définie pour $u = (x, y)$ par $Q_A(u) = 2x^2 - 2xy + 4y^2$. Vérifier que la signature de Q_A est $(2, 0)$. Ecrire la matrice A qui représente Q_A dans la base (e_1, e_2) et déterminer une base orthonormée (e'_1, e'_2) de $\mathbb{R}^2, \|\quad\|_\varphi)$ qui soit orthogonale par rapport à Q_A.

Interprétation géométrique :
la tangente en l'extrémité du rayon de direction e'_1 aux deux ellipses représentant Q_φ et Q_A a pour direction e'_2.



Exercice 6.21.
Soit Q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$Q(x, y, z) = 4x^2 + (2 - \alpha)y^2 + (3 + \alpha)z^2 + 4\alpha xy - (4 + 4\alpha)xz - 4yz$$

Montrer :

$$-2 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow \quad \alpha(y^2 - z^2 - 4xy + 4xz) \leq 4x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xz - 4yz$$

aide Maple : Vous pourrez utiliser le calcul des valeurs propres de la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, donnés par Maple :

Matrice de la forme quadratique dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 2m & -2-2m \\ 2m & 2-m & -2 \\ -2-2m & -2 & 3+m \end{bmatrix}$$

Calcul des valeurs propres de la matrice de la forme quadratique dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -3m+3 \\ 3m+6 \end{bmatrix}$$

Indications : On pourra vérifier que les valeurs propres de la matrice de Q sont $0, \quad -3\alpha + 3, \quad 3\alpha + 6$ et conclure. Ou, on pourra déterminer une forme réduite de Q dans une base orthogonale pour le produit scalaire donné obtenue par le procédé de Gram-Schmidt.

Exercice 6.22.
Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ donnée par sa matrice A dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & c \\ 1 & 2 & c \\ c & c & 3 \end{pmatrix}$$

où c est un nombre réel donné.

(1) Pourquoi la matrice A a-t-elle trois valeurs propres réelles $\lambda_3 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$? On notera v_3, v_2, v_1 les vecteurs propres associés.

(2) Montrer que si Q est définie positive alors nécessairement le déterminant de A est strictement positif. pour quelles valeurs de c le déterminant de la matrice A est-il positif ?

(3) On note Q_2 la forme quadratique définie sur l'espace vectoriel de dimension 2, $E_2 = vect(e_1, e_2)$, définie par $Q_2(v) = Q(v)$, écrire la matrice A_2 de Q_2. Montrer que l'implication "Q définie positive entraine Q_2 définie positive" est vraie. Vérifier que la forme quadratique Q_2 obtenue est bien définie positive.

(4) Soit (p, q) la signature de la forme quadratique Q. On se propose de montrer que si p est différent de 3 nécessairement $2 \leq p$. On se place dans le cas où p est strictement inférieur à 3.

   (4a) Montrer que dans ce cas, il est possible de définir un sous-espace vectoriel F de dimension $(3 - p)$ sur lequel Q est négative[1].

   (4b) Vérifier que alors $E_2 \bigcap F = \{0_{R^3}\}$ et que $dim(E_2 + F) = 2 + 3 - p$. En déduire que p est supérieur ou égal à 2

(5) En utilisant le résultat montré dans la question précédente donner, en fonction des valeurs de c, la signature de Q ? En particulier, pour quelles valeurs de c, Q est-elle définie positive ?

Exercice 6.23.
Soit Q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$Q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy$$

[1] ce qui signifie négative ou nulle

1. Vérifier que l'on peut écrire Q sous forme réduite des deux manières suivantes dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.

$$Q(x,y,z) = \frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{3}{2}(x+y)^2 + 3z^2$$
$$Q(x,y,z) = \frac{1}{2}(x-y)^2 + (x+y+z)^2 + \frac{1}{2}(x+y-2z)^2$$

2. A quelle condition une forme quadratique Q admet-elle une seule forme de décomposition dans une base orthonormée ?
3. Vérifier que l'on peut écrire Q comme somme algébrique de carrés sous la forme :

$$Q(x,y,z) = 2(x+\frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{2}y^2 + 3z^2$$

Cette décomposition est-elle une décomposition dans une base orthonormée ?
4. Laquelle de ces écritures permet d'affirmer que Q est définie positive

Exercice 6.24.
Voici une autre méthode permettant de réduire une forme quadratique, appliquée à l'exemple traité en cours :
Q(x,y,z,t)=2xy+2xz+2xt+2yz+2yt+2zt= Q(x,y,z,t)=2 x y+ x(2z+2t) +y(2z+2t) +2zt =2[x + (z+t)] [y + (z+t)] –2(z+t)^2+ 2zt
Q(x,y,z,t)= $2\frac{1}{4}$[(x+y)^2-(x-y)^2] - 2(z+t)^2+2zt = $\frac{1}{2}$[(x+y)^2-(x-y)^2]- 2z^2-2zt - 2t^2
=$\frac{1}{2}$[(x+y)^2-(x-y)^2]- 2(z+$\frac{1}{2}t)^2 - \frac{3}{2}t^2 = \frac{1}{2}(x+y)^2 - \frac{1}{2}(x-y)^2 - 2(z+\frac{1}{2}t)^2 - \frac{3}{2}t^2$
Comprenez cette méthode et inventez un exemple où cette méthode permet rapidement d'obtenir la signature d'une forme quadratique.

6.2.4 Nous voulons du concret

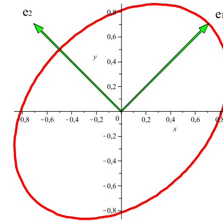
6.2.4.1 apprendre le cours

Exercice 6.25.
Soit dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ la conique (C) d'équation :

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 = 2$$

Trouver une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ telle que dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, (C) ait une équation de la forme :

$$ax'^2 + by'^2 = c$$

Expliciter la matrice de passage de la base canonique à la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ choisie. Représenter sur un dessin le repère initial, le nouveau repère et la conique tracée dans le nouveau repère.	

solution
La forme quadratique définie par $Q(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$ a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice admet deux vecteurs propres $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ de valeurs propres respectives 2 et 4, définis par

$$\overrightarrow{e_1} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e_2} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Ecrivant $x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} = x'_1\overrightarrow{e_1} + x'_2\overrightarrow{e_2}$, Q est réduite dans la nouvelle base orthonormée sous la forme

$$(x'_1, x'_2) \mapsto 2{x'_1}^2 + 4{x'_2}^2.$$

La conique d'équation $Q(x, y) = 2$ dans la base canonique, admet pour équation $2{x'_1}^2 + 4{x'_2}^2 = 2$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On reconnaît l'équation ${x'_1}^2 + 2{x'_2}^2 = 1$ d'une ellipse de grand axe la première bissectrice, de petit axe la seconde bissectrice. La longueur du demi-grand axe est 1, celle du demi petit axe est $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **annales exercice 20 p 26**.

6.2.4.2 aller plus loin

Exercice 6.26.
Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -m & -m \\ -m & 1 & -m \\ -m & -m & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeur propres et les sous-espaces propres de A ainsi qu'une base orthonormale directe $(\epsilon_i)_{1 \leq i \leq 3}$ de vecteurs propres de A
2. Discuter suivant la valeur de m la nature de la quadrique (tableau chapitre VIII) d'équation relativement à un repère orthonormé :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2m(xy + yz + zx) = 1$$

Exercice 6.27. Une propriété établie par Apollonius de Perge (-262,-180), avant l'invention du parchemin !

On considère l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique associé à la forme quadratique $\| \quad \|_2^2$ définis par :

$$(v \mid v') = xx' + yy' \qquad \|v\|_2^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{si} \quad v = (x, y) \quad \text{et} \quad v' = (x', y')$$

1. On considère la forme quadratique Q définie polynomialement par :

$$Q(v) = 2x^2 - 4xy + 5y^2 \quad \text{si} \quad v = (x, y)$$

   (a) Vérifier que Q est définie positive. Trouver une base orthonormée $\mathcal{B}_1$ de l'espace vectoriel euclidien $(\mathbb{R}^2, \| \quad \|_2))$ dans laquelle Q est représentée par une matrice diagonale.

   (b) On considère désormais l'espace vectoriel euclidien $(\mathbb{R}^2, \sqrt{Q})$ muni du produit scalaire, noté φ, qui est associé à la forme quadratique Q.

      i. Déterminer une base orthonormée (u', w') de l'espace vectoriel euclidien $(\mathbb{R}^2, \sqrt{Q})$ telle que u' soit colinéaire au vecteur $(1, 0)$ puis déterminer une base orthonormée $(u", w")$ de l'espace vectoriel euclidien $(\mathbb{R}^2, \sqrt{Q})$ telle que $u"$ soit colinéaire au vecteur $(0, 1)$

      ii. Soit (u, w) une base quelconque de $\mathbb{R}^2$ et B la matrice qui représente la forme quadratique $\| \quad \|_2^2)$ dans cette base. Exprimer la trace[1] de la matrice B en fonction de $\|u\|_2^2$ et de $\|w\|_2^2$.

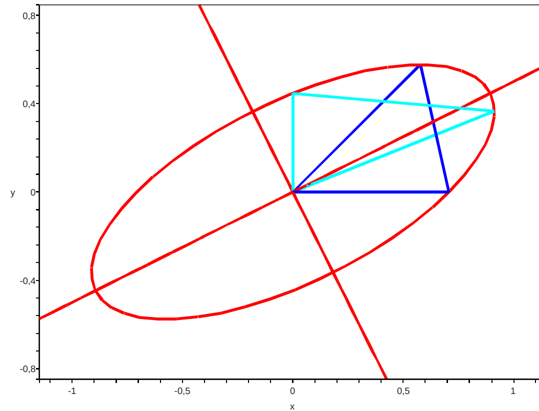
      iii. En déduire que pour toute base (u, w) de $\mathbb{R}^2$ qui est orthonormée dans l'espace vectoriel euclidien $(\mathbb{R}^2, \sqrt{Q})$, $\|u\|_2^2 + \|w\|_2^2$ est une constante qui ne dépend que de Q.

   (c) Utiliser les résultats de la première question pour représenter approximativement dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, les vecteurs de la base $\mathcal{B}_1$, puis la conique d'équation $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 1$. Représenter les vecteurs $u', w', u", w"$ puis interpréter graphiquement les résultats de la question 2(c) ;

2. On considère désormais la forme quadratique Q définie polynomialement par :

$$Q(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

[1] On rappelle que la trace d'une matrice (m_{ij}) est égale à la somme des coefficients m_{ii} de cette matrice et que **deux matrice semblables** M **et** $P^{-1}MP$ **ont même trace**



(a) Soit φ le produit scalaire associé à Q. Quelle est la boule unité de l'espace euclidien (E, φ) ?

(b) Soit M_0 le point de l'ellipse $\mathcal{C}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ de coordonnées (x_0, y_0). Vérifier[1] que si la parallèle à T_0 passant par l'origine du repère rencontre $\mathcal{C}$ en P_0, les vecteurs $u = \overrightarrow{OM_0}$ et $v = \overrightarrow{OP_0}$ forment une base orthonormée de (E, φ).

(c) Vérifier que $\|u^2\| + \|v^2\|$ est la trace de la matrice représentant Q dans la base (u, v) et en déduire :

$$OM_0^2 + OP_0^2 = a^2 + b^2$$

6.2.5 TP Maple

Exercice 6.28. : TP Maple : Série de Fourier d'une application et suite des projections

[1]sachant que la tangente T_0 à l'ellipse en M_0 a pour équation $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$

On considère l'espace vectoriel E des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont périodiques de période 2π, continues, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et impaires. E est muni de la forme bilinéaire symétrique qui au couple g et h associe le réel $\varphi(g,h) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(t)h(t)dt$. Nous notons $\|\cdot\|_2^2$ la forme quadratique associée. Nous rappelons qu'une "procédure Maple" est un ensemble d'instructions délimitée par les mots réservés "proc" et "end". On affecte la procédure en la nommant. Le passage à la ligne est obtenu en pressant la touche entrée et non en sélectionnant le "prompt " de la barre d'outils : vérifier que la barre verticale à gauche est conservée.

1. Calcul de la somme des n premiers termes de la série de Fourier.
   (a) Ecrire une procédure Maple, permettant de calculer les coefficients de Fourier b_k, où $b_k = \dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(kt)dt$, d'une application $f$de E donnée, à partir de l'expression de f sur $[0,\pi]$.
   (b) Et une procédure Maple permettant de calculer la somme des n premiers termes de la série appelée série de Fourier de f définie par $\sum b_k\ sin(kx)$ (TP Maple)
2. Etude des projetés sur une suite de sous-espaces vectoriels de dimension finie : On note E_n le sous-espace vectoriel de E engendré par les applications $(x \longmapsto \sin kx)$ lorsque l'entier k décrit $[1,n]$
   (a) Vérifier que (E_n,φ) est un espace euclidien et donner une base orthonormale de E_n.
   (b) Montrer que toute application f de E s'écrit de manière unique sous la forme $f = p_n(f) + \delta_n(f)$ où $p_n(f)$ est dans E_n et où $\delta_n(f)$ est orthogonale à E_n.
   (c) Exprimer $\|p_n(f)\|_2^2$ en fonction des coefficients de Fourier de f.
   (d) Montrer $\|f\|_2^2 = \|p_n(f)\|_2^2 + \|f - p_n(f)\|_2^2$.
   (e) Montrer $\|f\|_2 \geq \|p_n(f)\|_2$.
   (f) Montrer que pour toute application h_n appartenant au sous-espace vectoriel E_n, on a $\|f - p_n(f)\|_2 \leq \|f - h_n\|_2$.
   (g) Montrer que la suite $(\|f - p_n(f)\|_2)$ est décroissante.
   (h) Ecrire une procédure avec Maple permettant d'obtenir une valeur approchée $\|f - p_n(f)\|_2$. Tester la procédure pour différentes expressions de f. Que pensez-vous de la suite $(\|f - p_n(f)\|_2)$? (la démonstration de ce dernier résultat n'est pas demandé)

6.2.6 Problème : Méthode des moindres carrés.

Soit n un entier strictement supérieur à 2. Dans toute la suite chacun des

espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$ est rapporté à sa base canonique et est muni de la structure euclidienne usuelle définie par :

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\, x \,|\, y \,) =^t XY \qquad \|x\|^2 =^t XX \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \quad (\, x \,|\, y \,) =^t XY \qquad \|x\|^2 =^t XX \end{cases}.$$

Un vecteur de $\mathbb{R}^2$ (respectivement $\mathbb{R}^n$), noté x (respectivement y ou b) est représenté par la matrice colonne X, (respectivement Y, ou B) de ses coordonnées. Soit f une application linéaire **injective** de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^n$, de matrice A :

$$f : \qquad X \mapsto Y = AX.$$

1. Etude générale utilisant l'écriture matricielle.
   (a) Vérifiez que la matrice ${}^tAA$ est une matrice symétrique[1].
   (b) Montrer que ${}^tAA$ est la matrice d'une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^2$.
   (c) On note $F = Imf$, l'image de $\mathbb{R}^2$ par f. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $F^\perp$, orthogonal de F dans $\mathbb{R}^n$?
   (d) Etablissez qu'un élément y de $\mathbb{R}^n$ appartient à $F^\perp$ si et seulement si :
   $${}^tAY = 0_{\mathbb{R}^2}.$$
   (e) Vérifiez en utilisant la question précédente que la projection orthogonale sur F d'un vecteur b de $\mathbb{R}^n$ de matrice des coordonnées B est le vecteur $p_F(b)$ de matrice des coordonnées AX_0 où $X_0 = ({}^tAA)^{-1}\,{}^tAB$.
   (f) Montrez en utilisant le théorème de Pythagore que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^2$:
   $${}^t(AX_0 - B)(AX_0 - B) \leq^t (AX - B)(AX - B)$$
2. De nombreux phénomènes physiques sont caractérisés par des relations du type $b = \alpha u + \beta$. A partir de deux couples (u_1, u_2) et (b_1, b_2) de données expérimentales, on peut théoriquement calculer α et β. Cependant les données expérimentales sont entâchées d'erreurs de mesure et pour pallier à ces erreurs on effectue un nombre suffisamment grand, n, d'expérimentations conduisant à deux n-uplets de valeurs expérimentales

[1] On note ${}^tA$ la matrice transposée de A

$u = (u_1, u_2, ...u_n)$ et $b = (b_1, b_2, ...b_n)$ reliées par ce phénomène physique. Déterminer α et β s'écrit alors, trouver un élément $x = (\alpha, \beta)$ de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$AX = B \qquad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} u_1 & 1 \\ u_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ u_n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Nous notons f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par la matrice A supposée de rang 2. Cette méthode s'appelle méthode des moindres carrés.

(a) Si b appartenait à l'image de f, que pourrait-on dire de α et de β ?

(b) Généralement b n'appartient pas à l'image de f, on retient alors le couple $x_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ qui réalise le minimum de la norme euclidienne de la différence entre le n-uplet des valeurs calculées et le n-uplet des valeurs obtenues expérimentalement :

$$\underset{x=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2}{min}(\|AX - B\|^2), \text{ lorsque } (\alpha, \beta) \text{ décrit } \mathbb{R}^2.$$

Supposant que $\sum_{i=1}^{i=n} u_i = 0$, calculez $({}^tAA)^{-1}$, puis exprimez α_0 et β_0 en fonction de u, b et $\sum_{i=1}^{i=n} b_i$.

6.3 ANNEXE quadriques

Nous reprenons ici la méthode que vous avez étudié en première année pour étudier les coniques.
La théorie des coniques et des quadriques se développe en liaison avec le développement de la géométrie projective et de l'étude des formes quadratiques. Ainsi Euler(1748) donne une classification des quadriques. Monge et Hachette(1802) étendent cette classification. Cauchy (1826) reprend le problème de la réduction des quadriques et pose le problème (en langage moderne) de la réduction des matrices symétriques. Hesse(1861) met en évidence le rôle important du déterminant de la forme quadratique associée et de ses mineurs du premier et du deuxième ordre.

6.3.1 Les coniques

L'espace affine euclidien de dimension 2, $(\mathbb{R}^2, \| \|_2)$, rapporté à un repère $\mathcal{R}= (O, \vec{i}, \vec{j})$ où $(\vec{i}, \vec{j})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
f une fonction polynôme du second degré définie par :

$$(\mathrm{x},\mathrm{y}) \longmapsto \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \\ \mathrm{a}_{20}\mathrm{x}^2 + \mathrm{a}_{02}\mathrm{y}^2 + 2\mathrm{a}_{11}\mathrm{xy} + 2\mathrm{a}_{10}\mathrm{x} + 2\mathrm{a}_{01}\mathrm{y} + a_{00}$$

notations :
On écrit f comme somme d'une fonction polynôme Q, homogène de degré 2, d'une fonction polynôme L, homogène de degré 1, et d'une constante a_{00}.

$$\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{Q}(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \mathrm{L}(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \mathrm{a}_{00}$$

Q est donc la forme quadratique :

$$(x,y) \longmapsto Q(x,y) = a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + 2a_{11}xy$$

$$Q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad avec \quad A = \begin{pmatrix} a_{20} & a_{11} \\ a_{11} & a_{02} \end{pmatrix}$$

L définit donc une forme linéaire :

$$(x,y) \longmapsto L(x,y) = (x,y) \longmapsto 2a_{10}x + 2a_{01}y$$

$$L(x,y) =^t B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad {}^tB = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{01} \end{pmatrix}$$

Le terme constant est :

$$(x,y) \longmapsto \quad a_{00}$$

Proposition 7.

Une ***conique*** *est l'ensemble Σ des points M du plan dont les coordonnées (x,y) dans un repère du plan vérifient une relation $f(x,y) = 0$ où f est un polynôme donné du second degré en x, y .*
Cette caractérisation est en effet indépendante du choix du repère $\mathcal{R}$ nous le supposerons cependant dans la suite orthonormé (resp. orthonormé direct).

Proposition 8.

La signature de la forme quadratique Q définie par les termes de degré deux de $f(x,y)$ permet de déterminer la nature de Σ.

1. *Si Q a pour rang 2 alors Σ admet un centre de symétrie et est appelée conique à centre.*
   Soit la signature de Q est $(2,0)$, Σ est soit une ellipse ou l'ensemble vide ou un point.
   Soit la signature de Q est $(1,1)$ Σ est une hyperbole soit la réunion de deux droites concourantes.
2. *Si la forme quadratique Q a pour rang 1 :*
   Soit la signature de Q est $(1,0)$ ou $(0,1)$, Σ est une parabole ou la réunion de deux droites parallèles (évebtuellement confondues) ou l'ensemble vide.

soit

rang 2	signature (2,0) signature (1,1)	ellipse - ens.vide - un point hyperbole - 2 droites concourantes
rang 1	signature (1,0) . .	parabole - 2 droites// - ens. vide

On réduit la forme quadratique Q dans une base orthonormée déduite de $(\vec{i},\vec{j})$:
La matrice symétrique A admet deux valeurs propres réelles et nous savons diagonaliser A dans un repère orthornormé(théorème spectral), on note ce repère, que l'on peut de plus supposer direct, $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$. Le repère $\mathcal{R}_1$ est donc déduit de $\mathcal{R}$ par rotation. On détermine la relation qui exprime à l'aide des coordonnées dans le repère $\mathcal{R}_1$ d'un point M que M appartient à la conique Σ. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}_1$. On sait :

$$M(x,y) \in \quad \Sigma \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} +^t B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{000} = 0$$

Or si les valeurs propres de A sont λ_1, λ_2 :

$$^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et si on note

$$L_1(x_1, y_1) =^t B_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad ^tB_1 =^t BP,$$

il vient :

$$M(x_1, y_1) \quad \in \quad \Sigma \quad \Leftrightarrow f_1(x_1, y_1) = 0$$

où

$$f_1(x_1, y_1) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + +2L_1(x_1, y_1) + \alpha.$$

1 Si le rang de A est 2, on dit que la quadrique étudiée est une **quadrique à centre** et l'origine Ω est appelé le **centre de la quadrique**.
En effet les valeurs propres de A sont non nulles et il existe un point Ω tel que $B + AX_\Omega = O$.
Dans le repère $\mathcal{R}_2 = (\Omega, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ la surface Σ a une équation sans termes linéaires de la forme :

$$f_2(x_2, y_2, z_2) = 0 \text{ où } f_2(x_2, y_2, z_2) = \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \beta$$

où β une constante et où λ_1 est positif ou nul (sinon on multipliera par -1)

On ramène l'équation implicite de Σ relativement au repère $\mathcal{R}_3$ déduit du repère $\mathcal{R}_2$ par une éventuelle permutation des axes au cas où M(X,Y) appartient à Σ s'écrit sous l'une des formes réduites suivantes :

Equation réduite	Schéma représentatif	Définition Représentation paramétrique
signature (2,0) $\beta < 0 \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$		ellipse (ou point) x = a cos u y = b sin u
$\beta = 0 \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$	un point	
$\beta > 0 \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$	ensemble vide	
signature (1,1) $\beta < 0 \quad \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$		hyperbole $x = a\varepsilon chu$ $y = bshu$ $\varepsilon = \pm 1$ suivant la branche.
$\beta > 0 \quad \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = -1$ asymptotes $\frac{X}{a} \pm \frac{Y}{b} = 0$		hyperbole $x = ashu$ $y = b\varepsilon chu$ $\varepsilon = \pm 1$
$\beta = 0 \quad \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$		couple de droites concourantes

3.Cas où rang A =1

A a exactement une valeur propre nulle. Partant du repère $\mathcal{R}_1$, on peut par une translation suivie d'une éventuelle permutation des axes se ramener à un repère $\mathcal{R}_2$ où la condition $M(x_2, y_2)$ appartient à Σ s'écrit $x_2^2 + 2py_2 = 0$..

Equation réduite	Schéma représentatif	Définition Représentation paramétrique
signature (1,0) $X^2 - 2py = 0$ $p \neq 0$		parabole
p=0		couple de droites parallèles

Exemple 6.3.1. : Caractériser la conique $\mathcal{C}$ d'équation $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 2y - 2 = 0$.

1. On réduit la forme quadratique $Q(v) = 3x^2 + 3y^2 - 2xy$ qui a pour matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, ses valeurs propres sont 2 et 4, une base orthonormée de l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de Q est $\overrightarrow{i}_1, \overrightarrow{j}_1$ où $\overrightarrow{i}_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $\overrightarrow{j}_1 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

La matrice représentant Q dans cette base est la matrice diagonale D où :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = {}^t PAP \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

La forme réduite de Q dans cette base est :

$$v = x_1 \overrightarrow{i}_1 + y_1 \overrightarrow{j}_1 \mapsto Q(v) = 2x_1^2 + 4y_1^2$$

2. Un point M tel que $\overrightarrow{OM} = x_1 \overrightarrow{i}_1 + y_1 \overrightarrow{j}_1$ appartient à $\mathcal{C}$ s'écrit :

$$2x_1^2 + 4y_1^2 - 2y - 2 = 0 \quad \text{où} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

L'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, (\overrightarrow{i}_1, \overrightarrow{j}_1))$ est :

$$2x_1^2 + 4y_1^2 - \sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}y_1 - 2 = 2(x_1^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_1) + 4(y_1^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}y_1) - 2 = 0$$

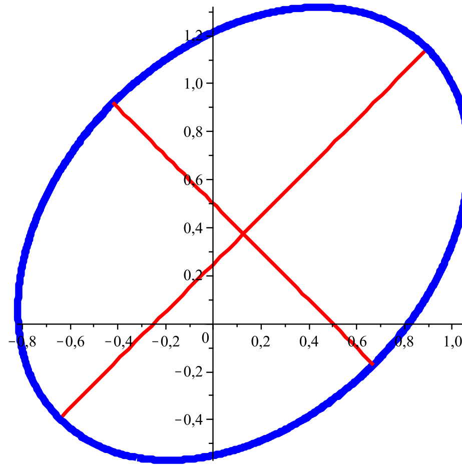
3. La condition M appartient à $\mathcal{C}$ dans le repère, translaté du précédent repère, $(\Omega, (\overrightarrow{i}_1, \overrightarrow{j}_1))$ où $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i}_1 + \frac{\sqrt{2}}{8}\overrightarrow{j}_1$, s'écrit si $\overrightarrow{\Omega M} = x_2\overrightarrow{i}_1 + y_2\overrightarrow{j}_1$:

$$2x_2^2 + 4y_2^2 - \frac{19}{8} = 0$$

Soit sous forme canonique :

$$\frac{x_2^2}{\frac{\sqrt{19}}{4}} + \frac{y_2^2}{\frac{\sqrt{19}}{4\sqrt{2}}} - 1 = 0.$$

C'est une ellipse de centre Ω, dont on peut donner les coordonnées dans le repère initial, on obtient $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{8}\overrightarrow{i} + \frac{3}{8}\overrightarrow{j}$ le grand axe a pour direction le vecteur de coordonnées $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et pour longueur $\frac{\sqrt{19}}{4}$ et le petit axe a pour direction le vecteur de coordonnées $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et pour demi-longueur $\frac{\sqrt{19}}{4\sqrt{2}}$



6.3.2 Les quadriques

L'espace affine euclidien (resp. orienté) de dimension 3 rapporté à un repère $\mathcal{R}$= (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$,$\vec{k}$)
f une fonction polynôme du second degré définie par :

$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) =$$
$$a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{002}z^2 + 2a_{110}xy + 2a_{101}xz + 2a_{011}yz + 2a_{100}x + 2a_{010}y + 2a_{001}z + a_{000}$$

notations :
On écrit f comme somme d'une fonction polynôme Q, homogène de degré 2, d'une fonction polynôme L, homogène de degré 1, et d'une constante a_{000}.

$$f(x,y,z) = Q(x,y,z) + L(x,y,z) + a_{000}$$

Q est donc la forme quadratique :

$$(x, y, z) \longmapsto Q(x, y, z) = a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{002}z^2 + 2a_{110}xy + 2a_{101}xz + 2a_{011}yz$$
$$Q(x, y, z) = \begin{bmatrix} xyz \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad avec \quad A = \begin{bmatrix} a_{200} & a_{110} & a_{101} \\ a_{110} & a_{020} & a_{011} \\ a_{101} & a_{011} & a_{002} \end{bmatrix}$$

L définit donc une forme linéaire :

$$(x, y, z) \longmapsto L(x, y, z) = (x, y, z) \longmapsto 2a_{100}x + 2a_{010}y + 2a_{001}z$$
$$L(x, y, z) =^t B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad {}^tB = [a_{100} \quad a_{010} \quad a_{001}]$$

Le terme constant est :

$$(x,y,z) \longmapsto \quad a_{000}$$

Proposition 9.

*Une **quadrique** est l'ensemble Σ des points M de l'espace dont les coordonnées (x,y,z) dans un repère du plan vérifient une relation f(x,y,z) = 0 où f est un polynôme donné du second degré en x, y et z.*
Cette caractérisation est en effet indépendante du choix du repère $\mathcal{R}$ nous le supposerons cependant dans la suite orthonormé (resp. orthonormé direct).

Proposition 10.

Le repère $\mathcal{R}$ étant orthonormé la signature de la forme quadratique Q définie par les termes de degré deux de f(x,y,z) ne dépend pas du choix de $\mathcal{R}$ et permet de déterminer la nature de Σ.

1. *Si Q a pour rang 3 alors Σ admet un centre de symétrie et est appelée quadrique à centre.*
   Soit la signature de Q est (3,0) ou (3,0), Σ est soit un ellipsoïde ou l'ensemble vide ou un point.
   Soit la signature de Q est (2,1) ou (1,2), Σ est soit un hyperboloïde à une nappe ou à deux nappes soit un cône.
2. *Si la forme quadratique Q a pour rang 2 :*
   Soit la signature de Q est (2,0) ou (0,2), Σ est un paraboloïde elliptique ou un cylindre elliptique ou l'ensemble vide.
   Soit la signature de Q est (1,1), Σ est un paraboloïde hyperbolique ou un cylindre hyperbolique ou la réunion de deux plans.
3. *Si la forme quadratique Q a pour rang 1, Σ est un cylindre elliptique ou la réunion de deux plans parallèles ou l'ensemble vide.*

soit

rang 3	signature (3,0) signature (2,1),(2,1)	ellipsoïde - ens.vide - un point hyperboloïde 1 nappe - 2 nappes - cône
rang 2	signature (2,0) . signature (1,1) . .	paraboloïde elliptique - cylindre elliptique - un point paraboloïde hyperbolique - cylindre hyperbolique - plans sécants
rang 1	signature (1,0)	cylindre parabolique - ens.vide - plans parallèles

On réduit la forme quadratique Q dans un repère orthonormé déduit de $\mathcal{R}$:
La matrice symétrique A admet trois valeurs propres réelles et nous savons diagonaliser A dans un repère orthornormé (chapitre 6), on note ce repère, que l'on peut de plus supposer direct, $\mathcal{R}_1$=(O,$\vec{i}_1$,$\vec{j}_1$,$\vec{k}_1$). Le repère $\mathcal{R}_1$ est donc déduit de $\mathcal{R}$ par rotation. On détermine la relation qui exprime à l'aide des coordonnées dans le repère $\mathcal{R}_1$ d'un point M que M appartient à la quadrique Σ. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}_1$. On sait :

$$M(x,y,z) \in \quad \Sigma \Leftrightarrow \begin{bmatrix} xyz \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} +^t B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + a_{000} = 0$$

Or si les valeurs propres de A sont λ_1,λ_2, λ_3 :

$$^tPAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Si on note $L_1(x_1, y_1, z_1) =^t B_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ où $^tB_1 =^t BP$, il vient :

$$M(x_1, y_1, z_1) \quad \in \quad \Sigma \quad \Leftrightarrow f_1(x_1, y_1, z_1) = 0$$

où $f_1(x_1, y_1, z_1) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + 2L_1(x_1, y_1, z_1) + \alpha$.

1 Si le rang de A est 3 on dit que la quadrique étudiée est une **quadrique à centre** et que Ω **est le centre de la quadrique**.
En effet les valeurs propres de A sont non nulles et il existe un point Ω tel que B + AX_Ω=O.
Dans le repère $\mathcal{R}_2$ = (Ω, $\vec{i}_1$,$\vec{j}_1$,$\vec{k}_1$) la surface Σ a une équation sans termes linéaires de la forme :

$$f_2(x_2,y_2,z_2)=0 \text{ où } f_2\ (x_2,y_2,z_2) = \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 + \beta$$

où β une constante et où λ_1 est positif ou nul (sinon on multipliera par -1)

On ramène l'équation implicite de Σ relativement au repère $\mathcal{R}_3$ déduit du repère $\mathcal{R}_2$ par une éventuelle permutation des axes au cas où M(X,Y,Z) appartient à Σ s'écrit sous l'une des formes réduites suivantes :

Equation réduite	Schéma représentatif	Définition Représentation paramétrique
signature (3,0) et $\beta < 0$ $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$ intersection avec les plans ($X=X_0$) ($Y=Y_0$) ($Z=Z_0$) ellipses ou ensemble vide		ellipsoïde x = a sin u cos v y = b sin u sin v z = c cos u
signature (3,0) et $\beta > 0$ $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = -1$	ensemble vide	ellipsoïde imaginaire
signature (2,1) et $\beta < 0$ $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$ intersection avec ($Z=Z_0$) : ellipse intersection avec plans ($X=X_0$) ou ($Y=Y_0$) : hyperbole		hyperboloïde à une nappe x = a ch u cos v y = b ch u sin v z = c sh u surface doublement réglée
signature (2,1) et $\beta > 0$ $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1$ intersection avec ($Z=Z_0$) : ellipses ou ensemble vide intersection avec les plans ($X=X_0$) ($Y=Y_0$) : hyperboles		hyperboloïde à deux nappes x = a sh u cos v y = b sh u sin v z = ± c ch u
signature (3,0) et $\beta=0$ $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 0$	Ω	cône imaginaire
signature (2,1) et $\beta=0$ $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0$ intersection avec ($Z=Z_0$) : ellipses ou le point Ω intersection avec les plans ($X=X_0$, $X_0 \neq 0$) ($Y=Y_0$, $Y_0 \neq 0$) : hyperboles ...		cône surface réglée

2 Si le rang de A vaut 2.

A a exactement une valeur propre nulle. Dans un repère $\mathcal{R}_2$ déduit de $\mathcal{R}_1$ par une translation suivie d'une éventuelle permutation des axes la condition M appartient à Σ s'écrit sous la forme $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \gamma z_2 = \beta$

- Cas où $\gamma \neq 0$
  Une nouvelle translation du repère permet d'obtenir dans un repère $\mathcal{R}_3$ une équation de la forme $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \gamma Z = 0$ que l'on écrit sous la forme $\dfrac{X^2}{a^2} \pm \dfrac{Y^2}{b^2} = 2kZ$
- Cas où γ=0
  L'équation s'écrit $\dfrac{X^2}{a^2} \pm \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ ou $\dfrac{X^2}{a^2} \pm \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$

	Cas où $\gamma \neq 0$	
signature (2,0) $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 2kz$ intersection avec (Z=Z_0) : ellipses ou ensemble vide intersection avec les plans (X=X_0) (Y=Y_0) : paraboles		paraboloïde elliptique
signature (1,1) $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 2kz$ intersection avec (Z=Z_0) : hyperbole intersection avec les plans (X=X_0) (Y=Y_0) : paraboles		paraboloïde hyperbolique surface doublement réglée
	Cas où $\gamma = 0$	
signature (2,0) $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ intersection avec (Z=Z_0) : ellipses intersection avec les plans (X=X_0) (Y=Y_0) : droites		cylindre elliptique surface réglée

signature (1,1) $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ intersection avec (Z=Z_0) : hyperbole intersection avec les plans ($X=X_0$) ($Y=Y_0$) : droites		cylindre hyperbolique surface réglée
signature (2,0) et $\beta > 0$ $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = -1$	ensemble vide	cylindre imaginaire
signature (2,0) et $\beta = 0$ $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$	$\{\Omega\ \}$	plans imaginaires
signature (1,1) et $\beta = 0$ $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$		réunion de 2 plans sécants $\dfrac{X}{a} = \dfrac{Y}{b}$ et $\dfrac{X}{a} = -\dfrac{Y}{b}$

3.Cas où rang A =1

A a exactement deux valeurs propres nulles. Partant du repère $\mathcal{R}_1$, on peut par une translation suivie d'une éventuelle permutation des axes se ramener à un repère $\mathcal{R}_2$ où la condition M (x_2, y_2,z_2) appartient à Σ s'écrit $\lambda_2 y_2^2 + 2\delta x_2 + 2\eta z_2 = \beta$ puis par rotation éventuelle à un repère $\mathcal{R}_3$ où M(X,Y,Z) appartient à Σ s'écrit $Y^2 = k$ ou $Y^2 = 2pX$.

[1]

---

[1]

Exemple 6.3.2. On considère la quadrique $\sum$ ensemble des points de coordonnées (x,y,z) relativement à un repère orthonormé $\mathcal{R}$ tels que $ax^2 + 3y^2 + 3y^2 + 2yz - 2(a+1)x + 4a = 0$.Déterminer la nature de cette quadrique en fonction de a

.

signature (1,0) $Y^2 = 2pX$ intersection avec (Z=Z_0) : paraboles		cylindre parabolique
y^2=k	ensemble vide ou	réunion de deux plans parallèles

Chapitre 7

SERIES DE FOURIER

Sommaire

7.1 COURS

7.1.1 Introduction

Nous munissons l'espace vectoriel des applications continues périodiques de période donnée, T, à valeurs dans $\mathbb{R}$ du produit scalaire, $(\, f \mid g\,) = \dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt$ et travaillons avec la famille orthogonale :

$$(1, \cos p\omega x, \sin p\omega x \,/\, p \in \mathbb{N} \quad \text{où} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}).$$

Nous savons ainsi approximer une application continue périodique par une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques et montrer l'inégalité de Bessel.

Vient la question, est-ce que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f au sens de la norme $\| \|_2$?
Nous reprenons alors le point de vue de la convergence simple des applications et donnons le théorème de Dirichlet, montré en exercice : si f est suffisamment régulière, de classe $\mathcal{C}^1$ la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f. Nous admettons en exercice la démonstration de ce théorème avec le noyau de Dirichlet. Nous admettons la convergence au sens de la norme $\| \|_2$.

7.1.1.1 Positionnement mathématique

Joseph Fourier s'attache dès 1807[1] à déterminer la température de chaque point d'un corps à un instant donné, en supposant que les températures initiales sont connues et en se donnant des contraintes aux bords du corps.

Ces conditions de nature spatiale et temporelle s'expriment dans le cas d'une armille (anneau) par une équation différentielle reliant la dérivée seconde par rapport à la variable spatiale permettant de repérer et la dérivée partielle de la température ν par rapport au temps :

$$\text{respectivement } \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} \text{ et } \frac{\partial \nu}{\partial t} \text{ vérifiant : } \frac{\partial \nu}{\partial t} - K\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} = 0$$

avec les conditions initiales $\nu(x,0) = F(x)$
et les conditions limites $\nu(1,t) = \nu(-1,t) = 0$

Dans le cas où la température initiale est $F(x) = cos(\frac{n}{\sqrt{k}}x)$, Fourier connaît les solutions :

$$(t,x) \rightarrow exp(-\frac{n^2}{k}t)cos(\frac{n}{\sqrt{k}}x)$$

Fourier, qui a enseigné l'analyse à l'Ecole Polytechnique, écrit alors la fonction arbitraire de répartition initiale de température F comme somme d'une série de fonctions propres,

$$(x \rightarrow cos(\frac{k}{\sqrt{k}}x)$$

[0]Joseph Fourier(1768-1830)

[1]Au début du $XIX^{\text{ème}}$ siècle, les physiciens sont partagés entre deux conceptions de la chaleur comme *substance fluide répandu dans toute la nature* ou comme *mouvement insensibles des molécules de la matière*. Fourier abandonne la discussion sur la nature de la chaleur.

et résout l'équation de la chaleur en associant à F, la somme de la série des solutions associée. Les mathématiciens s'opposent tout d'abord aux découvertes de Fourier et son livre *théorie analytique de la chaleur* ne parut que en 1822 : on refusait qu'une fonction discontinue puisse s'écrire comme somme de fonctions sinusoïdales continues.

7.1.2 Projections orthogonales

7.1.2.1 Rappels

1. Si f est une fonction définie sur un intervalle $[\alpha,\beta]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, f est intégrable si $\mathcal{R}e\, f$ et $\mathcal{I}m\, f$ le sont et :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} \mathcal{R}e\, f(x)\, dx + i \int_{\alpha}^{\beta} \mathcal{I}m\, f(x)\, dx$$

2. Rappelons aussi une propriété essentielle des fonctions périodiques.

Si f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ périodique de période T, intégrable sur $[0,T]$, pour tout réel α elle est intégrable sur $[\alpha, \alpha+T]$ et

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\, dx = \int_{0}^{T} f(x)\, dx.$$

démonstration.
$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{T} f(x)\, dx + \int_{T}^{\alpha+T} f(x)\, dx = \int_{0}^{T} f(x)\, dx$
Car :$\int_{\alpha}^{0} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{0} f(x+T)\, dx = \int_{\alpha+T}^{T} f(u)\, du = -\int_{T}^{\alpha+T} f(u)\, du$ □

7.1.2.2 Orthogonalité dans l'espace $\mathcal{C}_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Soit T un réel strictement positif, $\mathcal{C}_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'espace-vectoriel des applications périodiques de période T continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une application périodique de période T est caractérisée par sa restriction à $[0,T]$, nous pouvons munir l'espace vectoriel $\mathcal{C}_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ du produit scalaire, défini en (6.2), et de la norme associée sur l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$:

$$(f,g) \mapsto \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)g(t)dt \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{0}^{T} f^2(t)dt} \tag{7.1}$$

Théorème 7.1. *familles orthogonales de* $\mathcal{C}_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Si $\omega = \frac{2\pi}{T}$*, la famille d'applications* $1, \{\cos(p\omega x)\}_1^n, \{\sin(q\omega x)\}_1^n$*, est orthogonale pour le produit scalaire (7.1) et*

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T} f^2(x)\, dx = \begin{cases} 1\; si\, f = 1 \\ \frac{1}{2}\; si\, f \neq 1 \end{cases} \qquad \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(x)g(x)\, dx = 0$$

démonstration. basée sur les formules de linéarisation

$$\begin{cases} \cos(p\omega x)\cos(q\omega x) = \frac{1}{2}\big(\cos((p+q)\omega x) + \cos((p-q)\omega x)\big) \\ \sin(p\omega x)\sin(q\omega x) = \frac{1}{2}\big(\cos((p-q)\omega x) - \cos((p+q)\omega x)\big) \\ \sin(p\omega x)\cos(q\omega x) = \frac{1}{2}\big(\sin((p+q)\omega x) + \sin((p-q)\omega x)\big) \end{cases}$$

□

Definition 7.1.

On appelle ***polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à*** **n** *toute combinaison linéaire des applications* $1, \{\cos(p\omega x)\}_1^n, \{\sin(q\omega x)\}_1^n$. *Les réels* a_p *et* b_p *sont appelés les* ***coefficients*** *du polynôme trigonométrique écrit sous la forme :*

$$a_0 + \sum_{p=1}^{p=n} (a_p \cos(p\omega x) + b_p \sin(p\omega x))$$

Etant donné un élément quelconque f de $\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, nous pouvons, selon le théorème de projection (6.11), définir sa projection S_{Fn} sur le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n, et, la base $1, \{\cos(p\omega x)\}_1^n, \{\sin(p\omega x)\}_1^n$ étant orthogonale, nous savons écrire S_{Fn} dans cette base :

Théorème 7.2.

Soit n *un entier,* f *un élément de* $\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *muni du produit scalaire (7.1),* $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. *La projection orthogonale de* f *sur le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à* n *est le polynôme trigonométrique* $S_{Fn}(f)$ *de coefficients* $a_p(f)$ *et* $b_p(f)$ *donnés par les formules d'Euler-Fourier :*

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx$$

et pour p strictement supérieur à 1 :

$$a_p(f) = \frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\cos(p\omega x)\,dx, \quad b_p(f) = \frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\sin(p\omega x)\,dx \tag{7.2}$$

Definition 7.2. *coefficients de Fourier cas continu*

Les coefficients $a_p(f)$ *et* $b_p(f)$ *définis par (7.2) sont appelés les* ***coefficients trigonométriques de Fourier de*** **f** [a]

[a] cette définition sera généralisée dans la suite de ce chapitre pour des applications qui ne sont pas nécessairement continues

Exemple 7.1.1.

> Soit f l'application périodique de période $T = 2$ qui coïncide avec $|x|$ sur $[-1, 1]$. Déterminer le polynôme trigonométrique de degré n, projection orthogonale de f sur la famille orthogonale $1, \{\cos(p\omega x)\}_1^n, \{\sin(q\omega x)\}_1^n$ de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

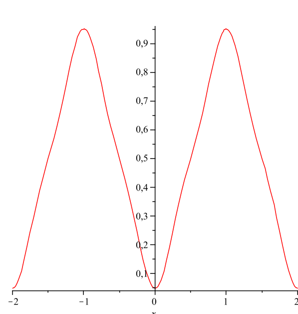
On détermine tout d'abord $\omega = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.
On sait que $S_{F\,n}(f)$ est de la forme

$$S_{F\,n}(f)(x) = a_0(f) + \sum_{p=1}^{p=n} (a_p(f)\cos(p\pi x) + b_p(f)\sin(p\pi x))$$

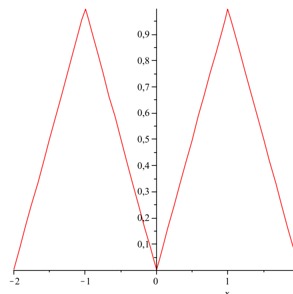
On détermine les coefficients de Fourier de f :

$$\begin{cases} a_0(f) = \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x|dx = \int_0^1 x dx = \dfrac{1}{2} \\ a_p(f) = \dfrac{2}{2}\int_{-1}^{1}|x|\cos(\pi p x)dx = 2\int_0^1 x\cos(\pi p x)dx = 2\dfrac{(-1)^p - 1}{p^2\pi^2} \\ b_p(f) = \dfrac{2}{2}\int_{-1}^{1}|x|\sin(\pi p x)dx = 0 \end{cases}$$

Représentons graphiquement les polynômes trigonométriques $S_{F\,3}(f)$ et $S_{F\,100}(f)$



$S_{F\,3}(f)(x) = 1/2 + \dfrac{4\cos(\pi x)}{\pi^2} + \dfrac{4\cos(3\pi x)}{9\pi^2}$



$S_{F\,100}(f)(x)$

Remarquons que $S_{F,3} - S_{F,1000}$ appartient à l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à 1000 et est donc orthogonal à $f - S_{F,1000}$. Selon le théorème de Pythagore, il vient :

$$\|f - S_{F,3}\|_2^2 = \|f - S_{F,1000}\|_2^2 + \|S_{F,1000} - S_{F,3}\|_2^2$$

Du point de vue de la norme $\|\ \|_2$ comme celui du graphique, il apparaît que $S_{F,1000}$ approche mieux f que $S_{F,3}$. Les questions auquelles nous souhaitons répondre, dans ce chapitre, sont donc **est ce que la suite ($\mathbf{S_{F,n}}$)** converge ? **en quel sens ? sa limite est-elle égale à f** ?.

Nous pouvons, en utilisant le théorème de Pythagore, modifier la question en effet :

$$\|f\|_2^2 = \|f - S_{F,n}\|_2^2 + \|S_{F,n}\|_2^2 \Rightarrow \|S_{F,n}\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \tag{7.3}$$

C'est ce qu'exprime l'inégalité de Bessel donnée ci-après :

Théorème 7.3. *Inégalité de Bessel*

Soit f une application continue périodique de période T à valeurs réelles, $a_0(f)$, $a_p(f)$ et $b_p(f)$ ses coefficients de Fourier alors :

$$a_0(f)^2 + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}(a_p(f)^2 + b_p(f)^2) \leq \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(x)dx$$

démonstration.
Il suffit de remarquer que

$$\|S_{F,n}\|_2^2 = a_0(f)^2 + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}(a_p(f)^2 + b_p(f)^2)$$

□
La suite $(\|S_{F,n}\|_2)$ est une suite de nombres réels croissante et majorée donc elle converge. L'égalité (7.3) montre alors que $(S_{F,n})$ converge[1] vers f dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}_T(\mathbb{R},\mathbb{R}), \| \|_2)$ si et seulement si la limite de $(\|S_{F,n}\|_2)$ est égale à $(\|f\|_2)$.

7.1.2.3 Généralisation dans $\mathcal{C}_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$

Qu'en est-il des applications continues sur $\mathbb{R}$, périodiques de période T mais à valeurs dans $\mathbb{C}$, espace vectoriel que nous noterons $\mathcal{C}_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
Nous admettons, dans le cadre de ce cours, qu'il est possible de généraliser la notion de produit scalaire au $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\mathcal{C}_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$, des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, qui sont T-périodiques continues sur [0,T], par

$$(f,g) \mapsto \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g}(t)dt.$$

Notant $\omega = \frac{2\pi}{T}$, la famille d'applications $1, \{\cos(p\omega x)\}_1^n, \{\sin(q\omega x)\}_1^n$, reste orthogonale pour ce produit scalaire.

[1]Rappelons que cela signifie que la suite $(\|f - S_{F,n}\|_2)$tend vers 0.

Théorème 7.4. *famille orthonormée de $\mathcal{C}_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$.*

Si $\omega = \frac{2\pi}{T}$, la famille d'applications $\{x \mapsto e^{ip\omega x}\, p \in \mathbb{Z}\}$ est orthonormée pour ce produit scalaire.

démonstration. Sachant que $0 \neq k\, x \mapsto e^{ik\omega x}$ a pour primitive $\dfrac{1}{ik\omega}e^{ik\omega x}$.

$$p \neq q \quad \frac{1}{T}\int_0^T e^{ip\omega x}e^{i(-q)\omega x})\, dx = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i(p-q)\omega x}\, dx = 0$$

$$p = q \quad \frac{1}{T}\int_0^T e^{ip\omega x}e^{i(-q)\omega x}\, dx = \frac{1}{T}\int_0^T 1\, dx = 1$$

□

Théorème 7.5.
Soit n un entier, la projection orthogonale de f sur l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n, $S_{F,n}(f)$, peut aussi s'écrire :

$$\sum_{p=-n}^{p=n} c_p e^{ip\omega x} \quad \text{avec} \quad c_p = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)e^{-ip\omega x}\, dx \tag{7.4}$$

Théorème 7.6.
Si $S_{F,n}(f) = \sum_{p=0}^{p=n}(c_p e^{ip\omega x}) = a_0 + \sum_{p=1}^{p=n}(a_p \cos(p\omega x) + b_p \sin(p\omega x))x$, il vient :

$$\frac{1}{T}\int_0^T |S_{F,n}(x)|^2\, dx = \sum_{p=-n}^{p=n} |c_p|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{p=-1}^{p=n}(|a_p|^2 + |b_p|^2)$$

démonstration. il s'agit des expressions de la norme au carré dans une base orthonormée puis dans une base orthogonale.□

7.1.3 Séries trigonométriques

Nous étudions donc désormais des suites de polynômes trigonométriques à coefficients réels ou complexes mais nous les considérons comme suite des sommes partielles d'une série, appelée série trigonométrique, de terme général $a_p cos(p\omega x) + b_p sin(p\omega x)$. Nous travaillons avec les deux écritures, celle dans la base $(\cos(p\omega x), \sin(p\omega x))$, et celle dans la base $(e^{ip\omega x}, e^{-ip\omega x})$:

$$a_p \frac{1}{2}(e^{ip\omega x} + e^{-ip\omega x}) - b_p \frac{i}{2}(e^{ip\omega x} - e^{-ip\omega x}) = c_p e^{ip\omega x} + c_{-p} e^{-ip\omega x}$$

Definition 7.3.

*Une **série trigonométrique** est une série d'applications qui peut s'écrire sous la forme :*

$$a_0 + \sum_{p\in\mathbb{N}^*} (a_p \cos(p\,\omega x) + b_p \sin(p\,\omega x)) \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{7.5}$$

où (a_p) et (b_p) sont des suites numériques réelles ou complexes[a]*.*
La série (7.5) s'écrit aussi en fonction des (c_p) où :

$$c_0 = a_0 \qquad 0 < p \qquad c_p = \frac{1}{2}(a_p - ib_p) \qquad c_{-p} = \frac{1}{2}(a_p + ib_p) \tag{7.6}$$

sous la forme :

$$c_0 + \sum_{p\in\mathbb{N}^*} (c_p e^{ip\omega x} + c_{-p} e^{-ip\omega x}) \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

On la note alors $\sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p e^{ip\omega x}$ tout en sachant qu'elle converge (simplement, uniformément, absolument) si la série d'applications (7.5) converge (simplement, uniformément, absolument).

[a] indépendantes de x

Remarque 7.1.1.

$$a_0 = c_0 \qquad 0 < p \qquad a_p = c_p + c_{-p} \qquad b_p = i(c_p - c_{-p}) \tag{7.7}$$

Conséquence : Si les coefficients a_p et b_p sont réels alors :

$$c_0 = a_0 \qquad 0 < p \qquad c_p = \frac{1}{2}(a_p - ib_p) \qquad c_{-p} = \overline{c_p} \tag{7.8}$$

$$a_0 = c_0 \qquad 0 < p \qquad a_p = 2\text{Re}(c_p) \qquad b_p = -2\text{Im}(c_p) \tag{7.9}$$

Exemple 7.1.2.

Soit la série trigonométrique $\sum_{p\geq 1} \dfrac{(-1)^p}{p^2} \cos(p\pi x)$, obtenue en choisissant

$$\omega = \pi, \qquad a_0 = 0,\ 1 \leq p \quad a_p = \frac{(-1)^p}{p^2}, \qquad , b_p = 0.$$

1. Ecrire cette série trigonométrique sous la forme $\sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p e^{ip\pi x}$.
2. Représenter avec Maple les applications $\dfrac{(-1)^p}{p^2} \cos(p\pi x)$ de 1 à 10.
3. Représenter avec Maple les sommes partielles de 1 à 10.
4. Montrer que cette série d'applications converge sur $\mathbb{R}$, et que la somme S de cette série est périodique de période 2 et continue sur $\mathbb{R}$.

1.Cette série trigonométrique s'écrit aussi :

$$\sum_{p\geq 1} \frac{(-1)^p}{2p^2} e^{ip\pi x} + \frac{(-1)^p}{2p^2} e^{-ip\pi x} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p e^{ip\pi x} \quad \text{avec} \quad c_0 = 0,\ p \in \mathbb{Z}^* \quad c_p = \frac{(-1)^p}{2p^2}.$$

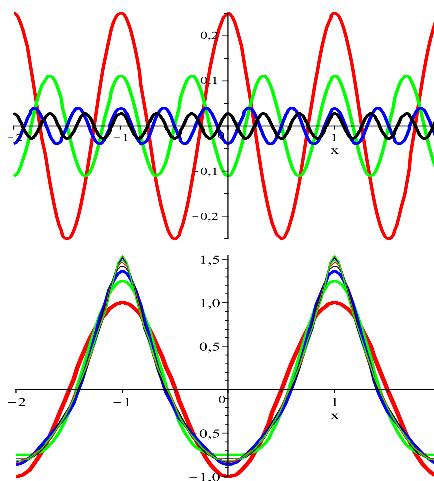
2. `> fp := x → (−1)^p/p^2 cos (p π x);`

`> plot([seq(fp(x),p=1..10)],x=-2..2).`

Ces applications de périodes respectives $2, 1, \frac{2}{3} .. \frac{2}{10}$ admettent toutes 2 pour période.

3.`> plot([seq(sum(fp(x), p = 1 .. n), n = 1 .. 10)],x=-2..2).`

Les sommes partielles sont périodiques de période 2 comme somme de telles applications.



4. $\|\dfrac{(-1)^p}{p^2} \cos(p\pi x)\|_\infty^{\mathbb{R}} = \dfrac{1}{p^2}$ la série d'applications $\sum_{p\geq 1} \dfrac{(-1)^p}{p^2} \cos(p\pi x)$ converge normalement[1] sur $\mathbb{R}$. Elle converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, nous avons par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n(x+2) = S_n(x) \Rightarrow S(x+2) = S(x)$$

De plus, elle converge uniformément[2] sur $\mathbb{R}$, la somme S est donc continue

[1]définition de la convergence normale chapitre III

[2]Si les séries numériques $\sum |a_p|$ et $\sum |b_p|$ convergent alors la série trigonométrique $\sum_{p\in\mathbb{N}^*} (a_p \cos(p\,\omega x) + b_p \sin(p\,\omega x))$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

sur $\mathbb{R}$.

Remarque 7.1.2.
Si la série trigonométrique (7.5) converge sur $\mathbb{R}$, sa somme est une application périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Théorème 7.7.

Si la série trigonométrique $\sum_{p\in\mathbb{N}^*}(a_p \cos(p\,\omega x) + b_p \sin(p\,\omega x))$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$*, les coefficients* a_0*,* a_p*, et* b_p *s'obtiennent à partir de la somme* f *de la série par les formules d'Euler-Fourier (7.2)*

Remarque 7.1.3.

L'énoncé qui précède signifie exactement que si une série trigonométrique converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers sa somme f, la somme partielle d'ordre n est la projection orthogonale de f sur l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n. Par contre Abel donne en 1826 l'exemple de la série trigonométrique $\sum_{1\leq n} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(nx)$ qui convergence simplement sur $\mathbb{R}$ sans que la somme de la série soit continue sur $\mathbb{R}$. Nous allons désormais nous étudier l'approximation d'applications périodiques qui ne sont pas nécessairement continues.

7.1.4 Développement d'une application en série de fourier

Nous approximons une application f, définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et périodique de période T, par les sommes partielles d'une série trigonométrique appelée série de Fourier de f, sans supposer f continue.

7.1.4.1 Applications périodiques $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Definition 7.4.

Une application f définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ ***est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux*** *sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision finie de points $x_0 = a < x_1, \ldots < x_n = b$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles ouverts d'extrémités x_i et x_{i+1} soit prolongeable en une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert qui contient $[x_i, x_{i+1}]$.*
Nous dirons qu'une application T-périodique f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux si elle est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un intervalle de la forme $[\alpha, \alpha + T]$.

Conséquence
Si f est $\mathcal{C}^1$ sur $]x_i, x_{i+1}[$, alors elle est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et admet en tout point x tel que $x_i < x < x_{i+1}$ une limite à droite et à gauche égale à $f(x)$.
Sachant de plus qu'elle coïncide avec une application g_i de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert qui contient $[x_i, x_{i+1}]$,elle admet une limite à droite en x_{i+1} noteé $f(x^+_{i+1})$ et $f(x^+_{i+1}) = g_i(x_{i+1})$ et une limite à gauche en x_i notée $f(x^-_i)$ et $f(x^-_i) = g_i(x_i)$.

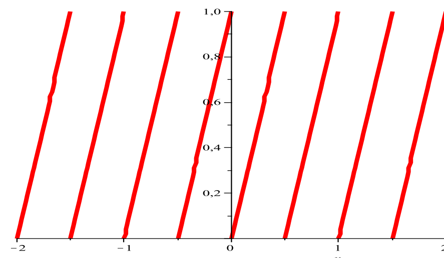
Exemple 7.1.3.

On note $\mathrm{E}(x)$ la partie entière du réel x.
1.Vérifier que $f(x) = 2x - \mathrm{E}(2x)$ est périodique et tracer sa courbe représentative avec Maple.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
3. Donner la limite à droite et la limite à gauche de f en tout point.

1.Sachant que la partie entière est périodique de période 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + \frac{1}{2}) = 2(x + \frac{1}{2}) - \mathrm{E}(2x + 1)$$
$$= 2x - \mathrm{E}(2x) = f(x)$$

```
> plot(2x-floor(2x),x=-2..2,
discont=true);
```



2.f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, \frac{1}{2}]$ car elle coïncide sur $]0, \frac{1}{2}[$ avec $x \mapsto 2x$ qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. f étant périodique de période $\frac{1}{2}$, f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
f est continue sur $]0, \frac{1}{2}[$ sa limite à droite et à gauche en tout point de $]0, \frac{1}{2}[$ est égale à $f(x) = 2x$. Sa limite à droite de 0 est $f(0^+) = 0$. Sa limite à gauche de $\frac{1}{2}$ est $f(\frac{1}{2}^-) = 1$.

7.1.4.2 Définition

Definition 7.5.

Soit f une application périodique de période T, intégrable sur un intervalle de la forme $[\alpha, \alpha + T]$, on définit la ***série de Fourier de f*** *comme étant la série trigonométrique*

$$a_0 + \sum a_p \cos(p\omega x) + b_p \sin(p\omega x) \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

où a_p et b_p sont donnés par les formules d'Euler-Fourier (7.2). a_p et b_p sont sont appelés les ***coefficients trigonométriques de Fourier de*** *f.*
La série de Fourier de f s'écrit aussi

$$c_0 + \sum c_{-p} e^{-ip\omega x} + c_p e^{ip\omega x} \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

et où $\qquad \forall p \in \mathbb{Z} \qquad \mathbf{c_p = \frac{1}{T} \int_\alpha^{\alpha+T} f(x) e^{-ip\omega x}\, dx}$.
Les coefficients c_p sont appelés les ***coefficients de Fourier de f****.*

Théorème 7.8.

Si f est impaire, la série de Fourier de f est une "série de sinus"[a] telle que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad b_p(f) = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) sin(p\omega x)\, dx$$

Si f est paire, la série de Fourier de f est une "série de cosinus"[b] telle que :

$$a_0(f) = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\, dx \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \quad a_p(f) = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) cos(p\omega x)\, dx$$

[a] autrement dit $\forall p \in \mathbb{N} \quad a_p(f) = 0$
[b] autrement dit $\forall p \in \mathbb{N} \quad b_p(f) = 0$

Exemple 7.1.4.

Déterminer la série de Fourier d'une application f périodique de période 2π sachant que f est impaire et vaut 1 sur l'intervalle ouvert $]0, \pi[$.

On choisit de calculer les coefficients trigonométriques de f, car on sait déjà que $a_p = 0$. La série de Fourier de f s'écrit $\sum b_p \sin(p\omega x) \quad p \in \mathbb{N}^*$.
On calcule tout d'abord $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

$$1 \leq p \quad b_p = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(p\omega x)dx = \frac{2}{\pi}[-\frac{\cos(px)}{p}]_0^{\pi} = \frac{2}{p\pi}(1-(-1)^p)$$

$$k \in \mathbb{N}^* \quad b_{2k} = 0 \qquad k \in \mathbb{N} \quad b_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi}$$

La série de Fourier de f est $\sum_{1\leq k} \frac{4}{(2k+1)^2\pi} \sin(2k+1)\pi x$.

Remarque 7.1.4.
Il existe une infinité d'applications g qui ont même série de Fourier que f. Il suffit pour s'en convaincre de considérer une application g de période 2π qui vaut -1 sur $]-\pi, 0[$ et 1 sur $]0, \pi[$ en prenant n'importe quelle valeur en -1, 0 et 1.

7.1.4.3 Premières propriétés des coefficients

Théorème 7.9.

La suite des coefficients de Fourier de f est majorée par

$$\|f\|_1 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} |f(x)|\, dx.$$

Théorème 7.10. *régularité de f et vitesse de convergence des coefficients de la série de Fourier vers 0.*

1. *Si f est de classe* $\mathcal{C}^1$ *alors pour* $1 \leq p$[a]

$$c_p(f) = \frac{1}{ip\omega} c_p(f') \Rightarrow |c_p(f)| = 0(\frac{1}{p}) \quad |a_p(f)| = 0(\frac{1}{p}), \ |b_p(f)| = 0(\frac{1}{p}) \quad (7.10)$$

2. *Si f est de classe* $\mathcal{C}^2$ *alors*[b] *la série de Fourier de f converge normalement car :*

$$c_p(f) = \frac{-1}{(p\omega)^2} c_p(f") \Rightarrow |c_p(f)| = 0(\frac{1}{p^2}) \quad |a_p(f)| = 0(\frac{1}{p^2}), \ |b_p(f)| = 0(\frac{1}{p^2})$$

[a] Il suffit que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue
[b] Il suffit que f soit de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux et continue

Remarque 7.1.5.
L'égalité $c_p(f') = ip\omega c_p(f)$ montre que la série de Fourier de f' est alors la dérivée terme à terme de la série de Fourier de f.

Le théorème de Dirichlet précise les liens entre la régularité d'une application et la convergence de sa série de Fourier ainsi que la somme de sa série de Fourier.

Théorème 7.11. *théorème de Dirichlet*

Si f est une application T-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un intervalle de la forme $[\alpha, \alpha+T]$ alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$.
De plus la somme $S_F(f)$ de la série de Fourier de f prend en tout point x la valeur :

$$S_F(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$$

En réalité si f est continue il y a alors convergence normale de la série de Fourier de f vers f. On peut montrer la convergence uniforme en utilisant le noyau de Dirichlet une démonstration est proposée dans l'exercice (7.16).

Exemple 7.1.5.

1. Vérifier que l'application créneau f de période 2π impaire définie par :

$$0 \leq x < \pi \qquad f(x) = 1 \qquad\qquad f(0) = 0 \qquad f(1) = 0$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
2. Montrer que la série de Fourier de f calculée dans l'exemple (7.1.4) ne converge pas uniformément sur $[-\pi, \pi]$.

Il suffit d'écrire que l'intervalle $]-\pi, \pi[$ a pour amplitude la période 2π de f. Or cet intervalle est la réunion de $]-\pi, 0[$ et de $]0, \pi[$. Sur $]-\pi, 0[$, f vaut -1 et une constante est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De même sur $]0, \pi[$, f vaut 1 et une constante est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. f étant $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le théorème de Dirichlet affirme que la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$.
De plus f est continue en tout point de l'ouvert $]0, \pi[$ sur lequel elle est constante égale à 1.

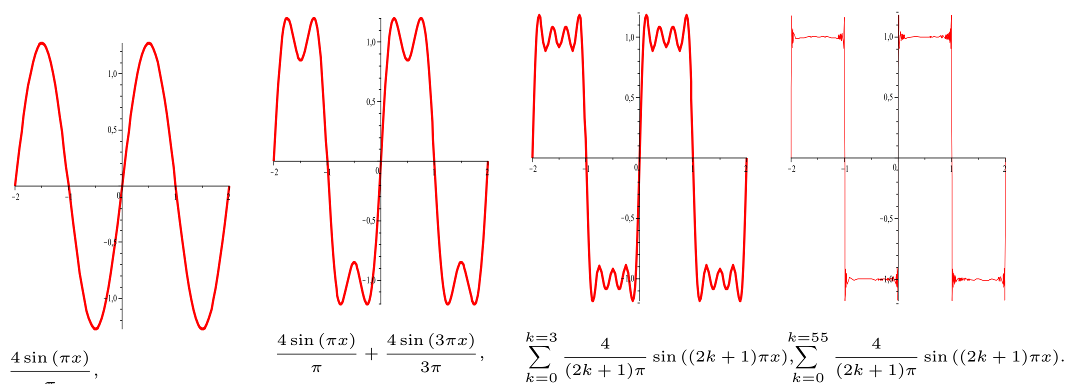
$$0 < x < \pi \quad f(x^+) = f(x^-) = f(x) \Rightarrow SF(x) = f(x) = 1$$

f admet une limite à droite en 0 égale à 1 et étant donné qu'elle vaut -1 sur $[-\pi, 0]$ elle admet une limite à gauche en 0 égale à -1 et :

$$f(0^+) = +1, f(0^-) = 1 \Rightarrow SF(0) = 0$$

La somme S_f de la série de Fourier de f n'est donc pas continue en 0. La somme de la série de Fourier n'est pas continue alors que le terme général de la série de Fourier est continue. Ceci montre que la série de Fourier de f ne converge pas uniformément.

Nous vérifions ce résultat en traçant les courbes représentatives des sommes partielles.



$\dfrac{4\sin(\pi x)}{\pi}$, $\dfrac{4\sin(\pi x)}{\pi} + \dfrac{4\sin(3\pi x)}{3\pi}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=3} \frac{4}{(2k+1)\pi}\sin((2k+1)\pi x)$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=55} \frac{4}{(2k+1)\pi}\sin((2k+1)\pi x)$.

Nous reviendrons en exercice sur cet irréductible "décrochage" qui apparaît lorsque une suite d'applications continues tend vers une limite qui n'est pas continue.

7.1.4.4 Egalité de Parseval

Nous admettons qu'il est possible de prolonger l'inégalité de Bessel établie en (7.3) ainsi que la comparaison des coefficients de Fourier d'une application et de sa dérivée (7.10), lorsque la dérivée n'est pas définie en un nombre fini de points.
Nous admettons dans ce cours, que l'inégalité de Bessel établie en (7.3) dans le cas des applications continues à valeurs réelles se prolonge pour les application à valeurs complexes qui sont continues sauf en un nombre au plus fini de points.

Proposition 11. *Inégalité de Bessel : convergence de la série* $\sum |c_p(f)|^2$

Si une application T-périodique, f est continue alors la série $\sum_{p\in\mathbb{Z}} |c_p(f)|^2$ *converge et*

$$\sum_{p=0}^{+\infty} |c_{-p}|^2 + |c_p|^2 \leq \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} |f|^2(x)dx$$

conséquence
En particulier les coefficients de Fourier de f, $c_{-n}(f)$ et $c_n(f)$, et les coefficients trigonométriques de f, $a_n(f)$ et $b_n(f)$, tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Théorème 7.12.

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue alors sa série de fourier converge normalement.

Théorème 7.13. *théorème de Parseval*

Si f, périodique de période T, est de classe $\mathcal{C}^1$ alors :

$$c_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} |c_{-p}|^2 + |c_p|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f|^2(x)dx$$

$$|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty} |a_p|^2 + |b_p|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f|^2(x)dx$$

L'égalité de Parseval montre la convergence au sens de la norme $\| \|_2$. Elle exprime que l'énergie totale est la somme des énergies des harmoniques : si f est une onde, $\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} |f|^2(x)dx$ est proportionnelle à l'énergie totale et $\sum_{p=0}^{n} |c_{-p}|^2 + |c_p|^2$ est proportionnelle à la somme des énergies des composantes harmoniques jusqu'à la $n^{\text{ième}}$. **conséquence**

7.2 EXERCICES

7.2.1 Séries de fonctions trigonométriques

7.2.1.1 apprentissage du cours

Exercice 7.1. [1]

1. Montrer que si a est un réel tel que $0 < a < 1$, alors la série d'applications
$$\sum_{p \in \mathbb{N}} f_p \quad \text{avec} \quad f_p(x) = a^p \cos(px)$$
converge uniformément sur $\mathbb{R}$
2. Déterminer la somme de cette série.

Exercice 7.2. [2]
Montrer que la série d'applications
$$\sum_{p \in \mathbb{N}} f_p \quad \text{avec} \quad f_p(x) = (-1)^p \frac{\cos(p\pi x)}{p^2} \quad p \geq 1$$
converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

7.2.1.2 pour aller plus loin

Exercice 7.3. *Plus les coefficients convergent rapidement vers 0, plus la somme est régulière*
On suppose que les séries numériques
$$\sum_{p \in N} |p\, a_p| \qquad \sum_{p \in \mathbb{N}} |p\, b_p|$$
convergent

1. Etudier alors la convergence de la série de fonctions
$$\sum_{p=0}^{p=+\infty} a_p cos(px) + b_p sin(px)$$

[1] Reconnaître une série géométrique
[2] normale convergence dès que les séries des coefficients convergent absolument

2. Montrer que alors la somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad S'(x) = \sum_{p=0}^{p=+\infty} f'_p$$

.

3. Pouvez-vous généraliser ?

7.2.2 Séries de Fourier et théorème de Dirichlet

7.2.2.1 apprentissage du cours

Exercice 7.4. *application créneau*

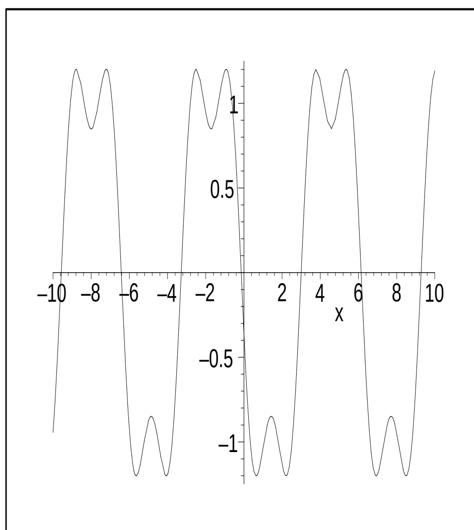
1. Déterminer la série de Fourier d'une application créneau périodique de période 2π telle que [1] :

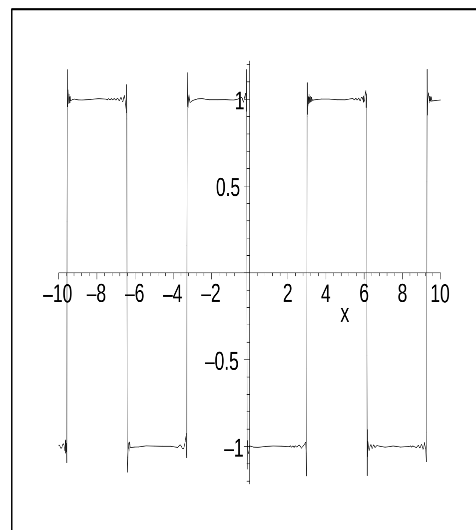
   $a \leq x < a+\pi \qquad f(x) = c \qquad\qquad a+\pi \leq x < a+2\pi \qquad f(x) = -c$

   où c est un réel donné. On effectuera à la fois le calcul des coefficients complexes et celui des coefficients trigonométriques.
2. Vérifier qu'une telle application est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, a+2\pi]$. Quelle est la somme de sa série de Fourier ?
3. Vérifier que la série de Fourier de f peut s'écrire sous la forme :

$$\sum \beta_k \sin\left((2k+1)(x-a)\right),$$

   Expliquer pourquoi en vous reportant aux exercices (7.10) et (7.11),





[1] Intégrer sur les intervalles les mieux adaptés en choisissant convenablement α

Avec Maple

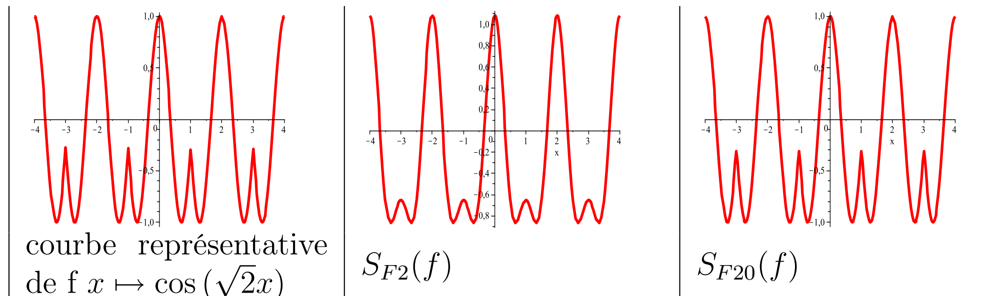
```
> restart ;
> SF := proc (f : :procedure, T, n : :integer, a)
local w, ao, k, ak, bk, t ; assume(k, integer) ;
w := 2*Pi/T ;
ao := simplify(combine(int(f(t)/T, t = a .. a+T))) ;
ak := simplify(combine(int(4*f(t)*cos(k*w*t)/T, t = a .. a+T))) ;
bk := simplify(combine(int(4*f(t)*sin(k*w*t)/T, t = a .. a+T))) ;
print(ao+Sum(ak*cos(k*w*x), k = 1 .. n)+Sum(bk*sin(k*w*x), k = 1 .. n))
end proc ;
```

```
> restart ;
> with(plots) ;
> SFG := proc (f : :procedure, T, n : :integer, a)
local w, ao, k, ak, bk, t, Sn ; assume(k, integer) ;
w := 2*Pi/T ;
ao := simplify(combine(int(f(t)/T, t = a .. a+T))) ;
ak := simplify(combine(int(2*f(t)*cos(k*w*t)/T, t = a .. a+T))) ;
bk := simplify(combine(int(2*f(t)*sin(k*w*t)/T, t = a .. a+T))) ;
Sn := x ↦ ao+sum(ak*cos(k*w*x)+bk*sin(k*w*x), k = 1 .. n) ;
plot(Sn(x), x = a-2*T .. a+2*T)
end proc ;
```

Exercice 7.5.

Soit f l'application paire, périodique de période 2 telle que sa restriction à $[0,1]$ coïncide avec $x \longmapsto \cos\sqrt{2}\pi x$.

1. Justifier le tracé de la courbe représentative de f donné ci-après.



courbe représentative de f $x \mapsto \cos(\sqrt{2}x)$ — $S_{F2}(f)$ — $S_{F20}(f)$

2. Pourquoi la série de Fourier de f est-elle une série de cosinus ?
3. Pourquoi la série de Fourier de f est-elle normalement convergente ?
4. Pourquoi la somme de la série de Fourier de f coïncide-t-elle avec f ?

Exercice 7.6. signal en dents de scie

1. Tracer la courbe représentative de la fonction g en dents de scie sur $[-\pi, \pi]$ définie comme application de période 2π, impaire telle que : :

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \qquad g(x) = x \qquad\qquad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \qquad g(x) = x - \pi$$

   où c est une constante donnée,

2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi, \pi]$.

3. . Déterminer la série de Fourier de g considérée comme application de période 2π, en calculant les coefficients trigonométriques et les coefficients complexes de Fourier de g.
4. Vérifier que g admet π pour période, quelle propriétés des coefficients trigonométriques calculée ci-dessus correspond à ce résultat ?
5. Déterminer la somme de la série de Fourier de g.

Exercice 7.7.
Soit f la fonction de période 2π définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = a^2 \dfrac{x^2}{2}$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de g.
2. Montrer que la série de Fourier de f converge uniformément vers f.
3. Calculer $\sum_{n=0}^{n=+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.
4. Quelle autre somme proposez-vous de calculer ?

Exercice 7.8.
Soit a un réel non nul, déterminez la série de Fourier sous forme trigonométrique et sous forme complexe des fonctions
1. f, 2π périodique, qui vaut $\exp ax$ sur $[0, 2\pi]$ puis calculer $\sum_0^{+\infty} \frac{a \cos nx}{a^2+n^2}$
2. de $f(x) = max(0, sinx)$, quelle égalité permet d'écrire le théorème de Dirichlet pour $x = \pi$?

Exercice 7.9.
Déterminez la série de Fourier sous forme trigonométrique et sous forme complexe de la fonction $f(x) = max(0, sinx)$.

7.2.2.2 pour aller plus loin

Exercice 7.10. *Fourier de la translatée*

Soit f une application 2π périodique, continue par morceaux, vérifier que g, définie par $g(x) = f(x+a)$, est 2π périodique, continue par morceaux et déterminer les coefficients de fourier de g en fonction de ceux de f.

Exercice 7.11.
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est 2π périodique et continue par morceaux,telle que $f(x+\pi) = -f(x)$. Montrer que tous les coefficients trigonométriques de la série de Fourier de f d'indices pairs sont nuls.

Exercice 7.12.
f l'application 2π périodique et impaire définie sur $[0, \pi[$ par

$$0 \leq t < \pi \qquad f(t) = t(\pi - t).$$

1. L'application f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?
2. Calculer la série de Fourier de f et étudier sa convergence.
3. Vérifier que la somme de la série de Fourier de f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.13.

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique de période 2π telle que $\forall t \in [-\pi, \pi]$, $f(t) = at + b$.

1. Donner l'allure de la courbe représentative de f
2. f est-elle continue ?
3. f est-elle $\mathcal{C}^1$ par morceaux ?
4. Donner le développement en série de Fourier de l'application g définie par $g(t) = f(t) - b$.
5. En déduire le développement en série de Fourier de f.
6. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la série de Fourier de f.
7. Montrer :
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$$
.

8. Etablir que si $-\frac{b}{a} \in]-\pi, \pi[$ alors

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{n} sin \frac{nb}{a} = -\frac{b}{2a}$$

.

Exercice 7.14. 1. Etude de la série de Fourier de f application 2π périodique telle définie par $f(t) = t^2$ sur $[-\pi, \pi]$

1. Vérifiez le résultat donné par le logiciel Maple pour calculer l'expression suivante de la série de Fourier de f [1]

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$$

   Que valent les coefficients de Fourier c_n de f pour $n = 0$, $0 < n$, $n < 0$.

2. Montrez, en précisant l'énoncé du théorème utilisé et en vérifiant ses hypothèses que

$$\frac{\pi^2}{12} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

3. Montrez, en précisant l'énoncé du théorème utilisé et en vérifiant ses hypothèses que

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

7.2.2.3 pour aller beaucoup plus loin

Exercice 7.15.

1. Soit n un entier positif ou nul et a_n une constante réelle, on considère l'équation différentielle

$$y"_n(t) \quad + \quad y_n(t) \quad = \quad a_n cos(nt) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad (7.11)$$

2. Donner l'ensemble des solutions réelles de cette équation en fonction des valeurs de l'entier n. [2]

[1] les calculs ne sont pas demandés.

[2] On rappelle que l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y"_n(t) \quad + \quad y_n(t) = 0$ est un espace vectoriel de dimension 2 engendré par $t \mapsto e^{r_1 t}$ et $t \mapsto e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation caractéristique et que l'on cherche une solution particulière de $y"_n(t) \quad + \quad y_n(t) \quad = \quad e^{int}$ sous la forme λe^{int} si $r = in$ n'est pas solution de l'équation caractéristique et sous la forme $t\lambda e^{int}$ si $r = in$ est racine simple de l'équation caractéristique.

3. On considère une suite numérique réelle (a_n) telle que la série $\sum |a_n|$ soit convergente. On pose :

$$f(t) \quad = \quad \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n \quad cos(nt) \tag{7.12}$$

Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

4. En le justifiant avec précision à l'aide des théorèmes du cours, chercher les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y"(t) \quad + \quad y(t) \quad = \quad \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n \quad cos(nt) \quad = \quad f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{7.13}$$

Montrer en particulier que les solutions sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$

5. On considère dans cette question l'application f_0 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique, définie par :

$$f_0(t) \quad = \quad |t| \quad \forall t \in [-\pi, \pi] \tag{7.14}$$

6. Déterminer la série de Fourier de f_0.
7. Donner une série trigonométrique dont la somme est solution de l'équation différentielle

$$y"(t) \quad + \quad y(t) \quad = \quad f_0(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{7.15}$$

.

Exercice 7.16.

Soit f une application continue périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si a_p et b_p sont les coefficients de Fourier d'ordre p de f :

$$p \geq 1 \qquad a_p cos(p\omega x) + b_p sin(p\omega x) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) 2cos(\omega p(x-t))\, dt$$

2. En déduire que la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de f vérifie :

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \tfrac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) D_n(x-t)\, dt \text{ où} \\ D_n(y) &= 1 + 2cos(\omega y) + 2cos(\omega 2y) + \ldots + 2cos(\omega n y) \end{aligned}$$

3. Vérifier que $\dfrac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} D_n(t)\, dt = 1$.

7.2.3 Problèmes sur les séries de fourier

7.2.3.1 Problème 1 : un problème de mécanique

sujet rédigé avec Gérard Siarras : la parité du nombre de pistons intervient-elle dans la régularité du débit d'une pompe ?

1. **Etude du débit d'un cylindre**
   Un cylindre ne débite que dans la phase de refoulement, la fonction décrivant le débit d'un cylindre est une application périodique de période 2π donnée par :

$$f(t) = sint \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq \pi$$
$$f(t) = 0 \quad \text{si} \quad \pi \leq t \leq 2\pi$$

   (a) Tracer la courbe représentative de f
   (b) Déterminer la série de Fourier de f et vérifier qu'elle s'écrit sous la forme :

$$a_0 + b_1 \sin(t) + \sum_{p=0}^{p=+\infty} a_p \cos(pt)$$

   (c) Montrer que f est égale à la somme de sa série de Fourier

2. **Etude du débit d'une pompe à n pistons -** $n \geq 2$
   Dans une pompe à n pistons [1], les n pistons sont décalés angulairement de $\frac{2\pi}{n}$. Nous noterons les débits des cylindres $q_1 \quad q_2 \quad \ldots \quad q_k \quad \ldots \quad q_n$. Ils sont donnés par :

$$q_1(t) = f(t) \quad q_2(t) = f(t + \frac{2\pi}{n}) \quad q_3(t) = f(t + \frac{4\pi}{n})$$

$$q_k(t) = f(t + \frac{2(k-1)\pi}{n}) \quad \ldots \quad q_n(t) = f(t + \frac{2(n-1)\pi}{n})$$

   Le **débit Q d'une telle pompe** est la somme des débits de chaque piston :

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{k=n} q_k$$

[1] n est donc un entier donné que l'on supposera supérieur ou égal à 2

(a) Montrer que pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$:

$$q_k(t) = a_0 + b_1 \sin(\quad (t + \frac{2(k-1)\pi}{n})) + \sum_{p=0}^{p=+\infty} a_p \cos(p \quad (t + \frac{2(k-1)\pi}{n}))$$

(b) Etablir :

$$B = \sum_{k=0}^{k=n-1} \sin((t + \frac{2(k-1)\pi}{n})) = 0$$

(c) Etablir que si un entier p n'est pas multiple de n :

$$C_p = \sum_{k=0}^{k=n-1} \cos(p(t + \frac{2(k-1)\pi}{n})) = 0$$

(d) Que vaut C_p si l'entier p est multiple de n ?

(e) Montrer que :

$$Q(t) = \sum_{k=0}^{k=n-1} q_k(t) = na_0 + \sum_{p=0}^{p=+\infty} a_p C_p = na_0 + \sum_{q=0}^{q=+\infty} na_{qn} cos(nqt)$$

(f) Montrer que Q est la somme d'une série uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ et donner la valeur moyenne Q_m de Q sur $[0, 2\pi]$

3. **Pourquoi la parité de l'entier n modifie-t-elle l'expression de Q(t) ?**

(a) Remarquer que si n est pair, tout entier, $q.n$, multiple de n est pair et en déduire que Q(t) s'écrit alors sous la forme :

$$Q(t) = \sum_{k=0}^{k=n-1} q_k(t) = \frac{n}{\pi} - \frac{2n}{\pi} \sum_{q=0}^{q=+\infty} \frac{\cos(qnt)}{(qn)^2 - 1}$$

(b) Etablir que si n est impair :

$$Q(t) = \sum_{k=0}^{k=n-1} q_k(t) = \frac{n}{\pi} - \frac{2n}{\pi} \sum_{q=0}^{q=+\infty} \frac{\cos(2qnt)}{(2qn)^2 - 1}$$

4. **Comment varie le coefficient d'irrégularité** $r(Q) = \dfrac{M-m}{Q_m}$ **en fonction de la parité de n ?**

1 Lorsque n est pair

(a) Vérifier que Q est une application de période $\dfrac{2\pi}{n}$

(b) Montrer que Q atteint son minimum absolu m en 0.

(c) Montrer que Q est dérivable sur tout segment fermé de la forme $[\varepsilon, \dfrac{2\pi}{n} - \varepsilon]$ et que sa dérivée s'annule en $\dfrac{\pi}{n}$.
On admettra que Q atteint son maximum absolu M en $\dfrac{\pi}{n}$

(d) Vérifier

$$r(Q) = 4\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{n^2(2k+1)^2 - 1}$$

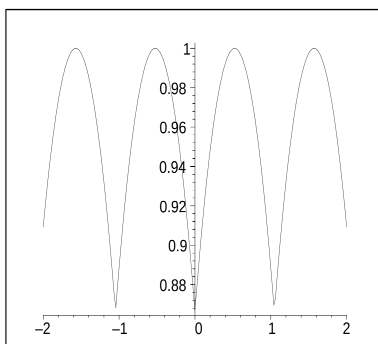
2 Lorsque n est impair

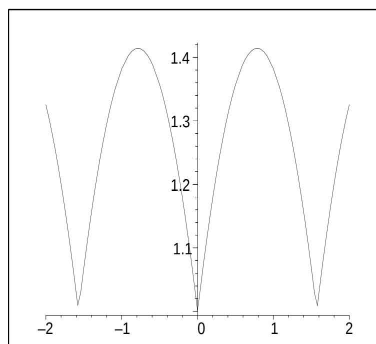
(a) Quelle est alors la période de Q ?
On admettra que Q atteint son maximum absolu M en $\dfrac{\pi}{2n}$ et son minimum en 0.

(b) Vérifier que :

$$r(Q) = 4\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{4n^2(2k+1)^2 - 1}$$

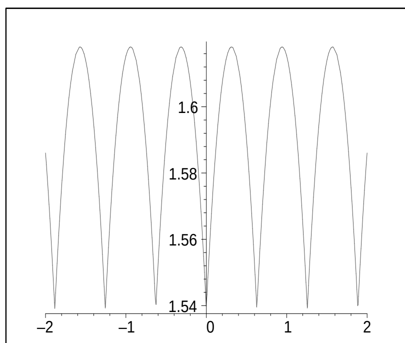
(c) Conclure



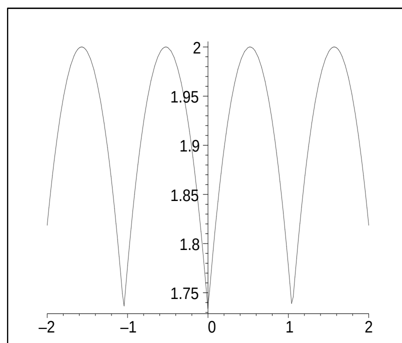


n=4

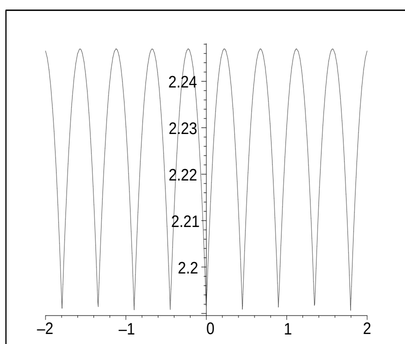
n=3


1.6
1.58
1.56
1.54
–2
–1
0
1
2

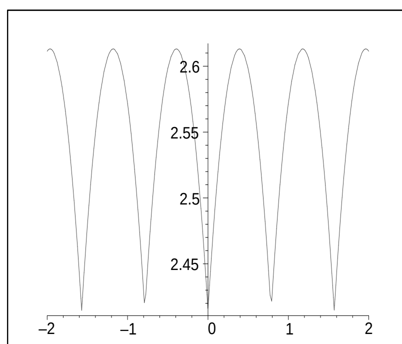
n=5


2
1.95
1.9
1.85
1.8
1.75
–2
–1
0
1
2

n=6


2.24
2.23
2.22
2.21
2.2
–2
–1
0
1
2

n=7


2.6
2.55
2.5
2.45
–2
–1
0
1
2

n=8

7.2.3.2 Problème2

I

Nous étudions la série de Fourier de f où $f(t) = |\sin t|$.

1. Nous déterminons sa forme et calculons les coefficients :
   (a) L'application f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?
   (b) Montrer que la série de Fourier de f considérée comme fonction 2π périodique s'écrit sous la forme[1]

   $$\sum_{0\leq p} a_p \cos(pt) \text{ avec } a_{2p+1} = 0$$

   et donnez l'expression des coefficients a_p en fonction de p.
   (c) Montrez, en précisant l'énoncé du théorème utilisé que

   $$\frac{1}{2} = \sum_{p=1}^{p=+\infty} \frac{1}{4p^2-1}.$$

2. Soit S_n la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de f.
   (a) Etudiez la convergence de la série $\sum a_p \cos(pt)$ et montrez que la suite (S_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Majorez $S_n^2 - f^2$ et en déduire que la suite (S_n^2) converge uniformément vers f^2 sur $\mathbb{R}$?
   (c) Que vaut $\int_0^{2\pi} \cos pt \cos qt dt$ en fonction des entiers p et q ?
   (d) Montrez que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_n(t)^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} a_k^2$.
   (e) Montrez :

   $$\sum_{k=1}^{k=\infty} a_k^2 = 1 - \frac{8}{\pi^2} \tag{7.16}$$

II

[1]
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$$

Soit g une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique de période 2π.
Nous étudions le système conservatif

$$u"(t) + u(t) = g(t), \quad u(0) = 0 \quad \text{et} \quad u'(0) = 0 \tag{7.17}$$

qui, partant du repos, est soumis à une excitation g.
Nous souhaitons déterminer si la solution u de (8.22) est périodique et si 2π est une période de u.
Tout d'abord nous considérons le système différentiel :

$$\begin{cases} y_1' = & y_2 \\ y_2' = & -y_1 \quad + g(t) \end{cases} \quad \text{avec la condition initiale} \quad (y_1(0), y_2(0)) = (0, 0) \tag{7.18}$$

1. Etude du système (7.18)
   (a) Déterminez une matrice P telle que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ où (z_1, z_2) soit solution d'un système différentiel de matrice diagonale avec la condition initiale $(z_1(0), z_2(0)) = (0, 0)$. Ecrivez ce système différentiel que vous noterez (4).
   (b) Exprimez la[1] solution $z = (z_1, z_2)$ de (4) en fonction de G et H définies par :

   $$G(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \exp(i(t-s)) \cdot g(s) ds \quad H(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \exp(-i(t-s)) \cdot g(s) ds.$$

   (c) Calculez la coordonnée y_1 de la[2] solution $y = (y_1, y_2)$ de (7.18), et vérifiez que y_1 est 2π périodique si et seulement si

   $$\int_0^{2\pi} \sin(t-s) \cdot g(s) ds = 0.$$

2. Revenons à l'équation (8.22)
   (a) Ecrivez l'équation (8.22) sous forme d'un système différentiel

   $$Y' = AY + B(t) \quad \text{où} \quad Y = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}.$$

[1] qui vérifie la condition initiale $(z_1(0), z_2(0)) = (0, 0)$.
[2] pour la condition initiale $(y_1(0), y_2(0)) = (0, 0)$.

(b) Quelles égalités doit vérifier g pour que u soit périodique de période 2π ?

3. Nous supposons de plus que g est une application paire et que π est période de g.

   (a) Vérifiez que u est paire et que 2π est une période de u.

   (b) Quel théorème permet de dire que la série de Fourier de u converge simplement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme u ?

III

Nous supposons désormais que $\mathbf{g}(\mathbf{t}) = |\sin(\mathbf{t})|$, nous cherchons à calculer la série de Fourier de la solution u de (8.22) écrite sous la forme $\sum \alpha_k \cos(kt)$.

1. Montrez que u" est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
2. En transformant $\int_0^{2\pi} u"(t)\cos(pt)dt$, montrez que :

$$u"(t) = \sum_{p=1}^{p=+\infty} -p^2 \alpha_p \cos(pt)$$

3. Quel est le développement en série de Fourier de $u + u"$?
4. Donnez la valeur de α_p en fonction de a_p qui a été calculé en I1.(c), lorsque p est différent de 1 ?
5. En utilisant l'égalité (7.16) calculez α_1.

7.2.3.3 Problème3 : Equation de la chaleur

L'équation de la chaleur s'écrit

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} - \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} = 0$$

où $((x,t) \to \nu(x,t))$ est une application de deux variables définies sur $I \times \mathbb{R}^{+\star}$ et où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $]0, \pi L[$ vérifiant :

$$\forall (x,t) \in I \times \mathbb{R}^{+\star} \qquad \frac{\partial \nu}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

où pour chaque valeur x de I, $(t \to \nu(x,t))$, supposée dérivable sur $]0, +\infty[$, a pour dérivée en t : $\frac{\partial \nu}{\partial t}(x,t)$ et pour chaque valeur t de $]0, +\infty[$, $(x \to \nu(x,t))$ supposée deux fois dérivable sur I, a pour dérivée seconde en x : $\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}(x,t)$.

On cherche des solutions ν de l'équation de la chaleur de la forme $((x,t) \to \nu(x,t)) = F(x)G(t))$ où F est une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur I continue sur l'adhérence de I et où G est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ continue sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que une telle solution non nulle en $(x_0, t_0) \in I \times \mathbb{R}^+$ vérifie :

$$\forall x \in I \qquad G'(t_0)F(x) - G(t_0)F''(x) = 0$$
$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \qquad F(x_0)G'(t) - F''(x_0)G(t) = 0$$

2. En déduire que si F et G sont non nulles alors ces applications sont solutions d'une équation différentielle linéaire homogène respectivement du second ordre et du premier ordre dont les coefficients constants dépendent d'un même paramètre que l'on notera λ.

$$\forall x \in I \qquad F''(x) - \lambda F(x) = 0$$
$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \qquad G'(t) - \lambda G(t) = 0$$

On considère désormais le problème d'évolution défini par :
- l'équation de la chaleur
- la condition initiale $\forall x \in [0, L] \qquad \nu(x, 0) = H(x)$ où H est une application donnée de $[0, \pi L]$ dans $\mathbb{R}$
- les conditions limites $\forall t \in \mathbb{R}^+ \qquad \nu(0,t) = \nu(\pi L, t) = 0$

3. Montrer que ce problème d'évolution a des solutions de la forme $((x,t) \to \nu(x,t) = F(x)G(t))$ non nulles lorsque la répartition initiale de chaleur H est proportionnelle à une application de la forme $(x \to \sin(nL^{-1}x))$ où $n \in \mathbb{N}$ et que ces solutions vérifient nécessairement :

$$\nu(x,t) = C \exp(-n^2 L^{-2} t) \sin(nL^{-1}x) \qquad C \in \mathbb{R}$$

Déterminer une solution de ce problème d'évolution lorsque

$$H(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \sin \frac{k}{L} x$$

4. On suppose désormais que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et a pour limite 0 en 0 et en πL. Montrer que H peut-être prolongée en une application Λ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ impaire de période $2\pi L$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue.

5. a- Vérifier que H est égale à la somme de la série de Fourier de Λ sur $[-\pi L, \pi L]$.

Soit $\sum_{k\geq 0} b_k \sin \frac{k}{L} x$ la série de Fourier de Λ, on admettra que la série numérique $\sum_{k\geq 0} b_k$est absolument convergente.

5. b- Montrer que $\forall x_1 \in [-\pi L, \pi L]$ la série d'applications

$$(t \rightarrow \sum_{k\geq 0} b_k exp(-k^2 L^{-2} t) \sin \frac{k}{L} x_1$$

converge uniformément sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}^{+\star}$ vers une application $S(x,t)$ et que si t_1 est nul, on a : $\forall x \in I \qquad S(x,0) = H(x)$

5. c- Montrer que $\forall t_1 \in]0, +\infty[$, la série d'applications

$$(x \rightarrow \sum_{k\geq 0} b_k exp(-k^2 L^{-2} t_1) \sin \frac{k}{L} x$$

converge uniformément sur I et que sa somme $S(x, t_1)$ vérifie :

$$S(0, t_1) = S(\pi L, t_1) = 0$$

5. d- Montrer que pour chaque valeur x_1 de I, l'application

$$(t \rightarrow \sum_{k=0}^{k=+\infty} b_k exp(-k^2 L^{-2} t) \sin \frac{k}{L} x_1$$

est dérivable sur $]0, +\infty[$: on montrera la dérivabilité en t_1 en se plaçant sur l'intervalle $[\frac{t_1}{2}, \infty[$.

5. e- Montrer que pour chaque valeur t_1 de $]0, +\infty[$, $(x \rightarrow S(x, t_1))$ est deux fois dérivable sur I.

5. f- Donner une solution du problème d'évolution lorsque H est $\mathcal{C}^1$ sur I et a pour limite 0 en 0 et en πL.

Chapitre 8

CALCUL DIFFERENTIEL

Sommaire

8.1 COURS

8.1.1 Introduction

8.1.1.1 Résumé

Nous introduisons la "dérivée" des fonctions vectorielles de plusieurs variables ou différentielle, nous définissons comme pour les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ les applications de classe $\mathcal{C}^1$ dont la différentielle est continue et les applications de classe $\mathcal{C}^2$ dont la différentielle est $\mathcal{C}^1$. La formule de changement de variable nous permettra d'aborder la résolution de quelques équations aux dérivées partielles simples. La formule de Taylor nous donne l'approximation précise à l'ordre 2 qui permettra de caractériser les extrema locaux d'une fonction. Nous donnons enfin deux théorèmes fondamentaux de l'analyse, très utilisés dans les sciences de l'ingénieur, le théorème de l'inverse local et le théorème des fonctions implicites.

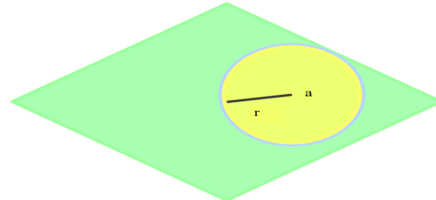
8.1.1.2 Positionnement mathématique

Nous avons maintenant suffisamment d'outils pour aborder la "dérivation" des fonctions vectorielles de plusieurs variables. C'est à dire l'approximation linéaire locale d'une fonction qui dépend de plusieurs variables puis son approximation par un polynôme de degré 2. L'approximation se fait à travers les normes et nécessite des fonctions définies sur un ouvert. Nous proposons à la fois une écriture formelle et une écriture matricielle plus concrète.

8.1.2 Application différentiable en un point de U

Nous considérons désormais une fonction f de $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ dans $\mathrm{F} = \mathbb{R}^p$ et introduisons une norme $\| \|_E$ et $\| \|_F$ sur chacun de ces espaces. Pour approximer $f(x)$ lorsque x tend vers un élément donné, a nous supposons f définie sur un sous-ensemble ouvert U de $\mathbb{R}^n$ qui contient a.

U étant ouvert, $\{h \in E / a + h \in U\}$ est un ouvert qui contient 0_E car c'est l'image réciproque de l'ouvert U par l'application continue $(h \mapsto a + h = x)$. Il existe donc $r > 0$ tel que si la norme de h est inférieure à r, f est définie en $a + h$.



Principe : On cherche à évaluer $f(a + h) - f(a)$ en fonction de h, lorsque la norme de h est suffisamment petite" en écrivant $(f(a+h) - f(a))$ comme somme d'une expression linéaire de h, $L_a(h)$, et d'un terme correctif, $r_a(h)$, dont la norme tend vers 0 plus vite que la norme de h.

8.1.2.1 Définition

Definition 8.1. *Meilleure approximation linéaire d'une fonction*

f est ***différentiable au point a*** *de U s'il existe une application linéaire L_a de E dans F telle que :*

$$\forall h \in U_a \qquad f(a + h) - f(a) = L_a(h) + \| h \|_E \, \varepsilon(h) \tag{8.1}$$

où l'application ε a pour limite 0_F lorsque h tend vers 0_E. .

Remarque 8.1.1.

E étant de dimension finie la définition de la différentiabilité en un point ne dépend pas du choix des normes $\| \|_E$ sur E et $\| \|_F$ sur F. Cette remarque essentielle justifie l'emploi en dimension finie, du terme différentiable sans préciser la norme.

Conséquence

Montrer que f est différentiable en a et a pour différentielle L_a en a, c'est montrer que l'application ε définie sur $U_a \backslash \{0_E\}$ par (8.1)

$$h \neq 0_E \qquad \varepsilon(h) = \frac{1}{\| h \|_E}[f(a + h) - f(a) - L_a(h)]$$

a pour limite 0_F lorsque h tend vers 0_E.

Remarquons que dans les cas où ε est définie en 0_E, comme dans les exemples de référence (8.1) et (8.2), la condition (8.1) exprime que $\varepsilon(0_E) = 0_F$.

Exemple 8.1.1.

Vérifier que f définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+|y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

est différentiable en $a = (0,0)$ et a pour différentielle l'application nulle en a.

Exemple 8.1.2.

Vérifier que f définie par :

$$f(x,y) = x\cos x + y\sin y$$

est différentiable en $a = (0,0)$ et a pour différentielle l'application $(x,y) \mapsto x$ en a.

En reprenant les notations de (8.1.2.1)

$$h = (x,y) \quad \varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a) - L_a(h)}{\| h \|_\infty} = \frac{x^2y}{(x^2+ \mid y \mid) \| h \|_\infty}$$

$$\mid \varepsilon(h) \mid \leq \frac{x^2 \mid y \mid}{\mid y \mid \| h \|_\infty} \leq \frac{x^2}{\| h \|_\infty} \leq \| h \|_\infty \Rightarrow \lim_{h \to 0_E} \varepsilon(h) = 0$$

Théorème 8.1.

Si f est différentiable au point a de U alors f est continue en a.

Proposition 12.

Si f est différentiable au point a alors l'application linéaire L_a est définie de manière unique.

démonstration en cours

Definition 8.2.

Si f est différentiable au point a de U, l'application linéaire L_a est appelée ***la différentielle de f au point*** *a, notée* $\mathbf{Df_{(a)}}$, *elle est définie par :*

$$(h \in E \mapsto Df_{(a)}(h) \in F).$$

démonstration en cours

Dans l'état d'esprit du programme vous rencontrerez peu d'exercices techniques sur une étude difficile de différentiabilité, par contre la définition a encore une fois un sens intuitif essentiel à la compréhension de la notion et donc à son utilisation par exemple en terme d'approximation :

Remarque 8.1.2.
La différentielle donne l'approximation linéaire à l'ordre 1", pour un "**faible" accroissement** de la variable alors noté $\mathbf{\Delta h}$ on écrit :

$$\mathbf{f(a + \Delta h) \simeq f(a) + Df_{(a)}(\Delta h)}.$$

Dans l'exemple précédent,écrivant $f(1+\Delta x, \Delta y) \simeq \Delta y$, on prend Δy comme valeur approchée de $f(1 + \Delta x, \Delta y)$.[1]

8.1.2.2 Exemples de référence

Exemple de référence 8.1.

Si f est constante, elle est différentiable en tout point a de U et sa différentielle est nulle, soit :

$$\forall a \in U \quad \forall h \in \mathrm{E} \quad Df_{(a)}(h) = 0_{\mathrm{F}}.$$

$$\forall a \in U \quad Df_{(a)} = 0_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

Exemple de référence 8.2.

Si f est linéaire sur E alors f est différentiable sur E de différentielle constante, et :

$$\forall a \in U \qquad \forall h \in \mathrm{E} \qquad Df_{(a)}(h) = f(h).$$

$$\forall a \in U \quad Df_{(a)} = f.$$

Exemple de référence 8.3.

[1]Vous retrouverez cette idée lorsqu'on introduit le linéarisé d'un système différentiel non linéaire pour l'étude de la stabilité autour d'un point d'équilibre.

Une forme quadratique, $(x \in \mathbb{R}^n \mapsto^t XBX \in \mathbb{R})$, [1] *est différentiable sur* $\mathbb{R}^n$ *et :*

$$\forall a \in U \qquad \forall h \in \mathrm{E} \qquad Df_{(a)}(h) = 2^t ABH.$$

[1] où X est la matrice colonne de x et B une matrice carrée symétrique d'ordre n à coefficients réels donnée

En effet :

$$f(a+h) - f(a) =^t (A+H)B(A+H) -^t ABA =^t HBA +^t ABH +^t HBH$$

$$f(a+h) - f(a) = 2^t ABH +^t HBH$$

Vérifier que $h \mapsto 2^t ABH$ est une application linéaire et que

$$\|^t HBH \| \leq \||\, B \,\|\|\| \, H \,\|^2$$

Exemple 8.1.3. :
Faire l'étude en $a = (1, 0)$ de l'application définie dans l'exemple (8.1.2) et vérifier que $Df_{(a)} = p_2$ définie par $p_2(x, y) = y$.

8.1.2.3 Opérations sur les applications et différentiabilité

Nous nous donnons différentes applications et des espaces vectoriels de dimension finie E, F, G. Les opérations usuelles sur les applications conservent la différentiabilité en a élément de U, ouvert de E.

Théorème 8.2. *linéarité de la différentielle*

Si f et g définies sur U à valeurs dans F, sont différentiables au point a alors pour tous réels λ et μ, $\lambda f + \mu g$ est différentiable au point a :

$$D(\lambda f + \mu g)_{(a)} = \lambda Df_{(a)} + \mu Dg_{(a)}.$$

démonstration :

$$\forall h \in U_a \qquad \begin{cases} f_{(a+h)} - f_{(a)} = Df_{(a)}(h) + \| h \| \, \varepsilon_1(h) \\ g_{(a+h)} - g_{(a)} = Dg_{(a)}(h) + \| h \| \, \varepsilon_2(h) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f+g)_{(a+h)} - (f+g)(a) = (Df_{(a)} + Dg_{(a)})(h) + \| h \| \, (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(h)$$

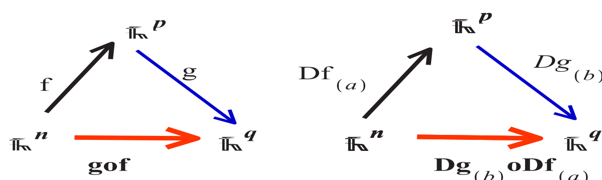
Théorème 8.3. *différentielle d'une composée*

Etant données une fonction f de E dans F définie sur un ouvert U de E et une fonction g de F dans G définie sur un ouvert V de F tel que $f(U) \subset V$. Si f est différentiable en a et si g est différentiable en $b = f(a)$ alors gof est différentiable en a et

$$D(gof)_{(a)} = Dg_{(f(a))} o Df_{(a)}$$

ou encore : $\quad \forall h \in E \quad D(gof)_{(a)}(h) = Dg_{(f(a))}(Df_{(a)}(h))$

démonstration en cours



En particulier lorsque F est rapporté à une base $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_p)$, f est définie par ses applications coordonnées notées $f_1, f_2, ..., f_p$[1]. Dans ce cas il suffit d'étudier séparément chacune des applications coordonnées de f.

Théorème 8.4. *coordonnées et différentielle*

Supposons donnée une base $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, ..., e'_p)$ de E et les applications coordonnées de f, $f_1, f_2, \cdots, f_p$, relatives à cette base. f est différentiable au point a si et seulement si chacune des applications coordonnées de f est différentiable au point a.
Les applications coordonnées de la différentielle de f au point a, sont les différentielles des applications coordonnées de f en a.

$$f = (f_1, f_2, \cdots, f_p) \quad \Rightarrow Df_{(a)} = (Df_{1(a)}, Df_{2(a)}, \cdots, Df_{p(a)})$$

démonstration en cours $f_i = p_i o f$

C'est grâce à ce théorème que dans la suite nous nous limiterons à l'étude d'applications de E dans $\mathbb{R}$, c'est à dire au cas p=1.

[1] si F = $\mathbb{R}^p$ on prendra la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Proposition 13. *produit fonction numérique-fonction vectorielle*

Etant données une application numérique[a] λ *et une application vectorielle* f *à valeurs dans* F *toutes deux définies sur* U *et différentiables en* a *alors* λf *est différentiable au point* a *et*

$$D(\lambda f)_{(a)}(h) = \lambda(a) Df_{(a)}(h) + D\lambda_{(a)}(h) g(a)$$

[a] à valeurs dans $\mathbb{R}$

Proposition 14. *produit scalaire de fonctions vectorielles*

Le produit scalaire de deux applications à valeurs dans $F = \mathbb{R}^p$ *différentiables en* a *est différentiable en* a *et*

$$\forall h \in E \quad D(f|g)_{(a)}(h) = (f(a)|Dg_{(a)}(h)) + (Df_{(a)}(h)|g(a))$$

8.1.2.4 Matrice jacobienne

Si nous rapportons E et F respectivement à une base[2] $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et une base $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, ..., e'_p)$, la différentielle de f en a est définie par une matrice.

Definition 8.3.

Si l'application f *est différentiable en* a *et si* E *et* F *sont respectivement rapportés aux bases* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{E}'$*, on appelle* ***matrice jacobienne*** *de* f *en* a *la matrice de l'application linéaire* Df_a*. On la note* $\mathbf{J_f(a)}$.

L'image $Df_a(h)$ d'un vecteur h de E de matrice colonne H est le vecteur de matrice colonne $J_f(a).H$.

Théorème 8.5. *composition et produit des matrices*

Si f *est différentiable en* a *et* g *en* $f(a)$*, la matrice jacobienne de* gof *en* a *est :*

$$J_{gof}(a) = J_g(f(a)) J_f(a). \tag{8.2}$$

démonstration voir le théorème 8.15

[2] Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, sans précision contraire, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^p$.

Exemple 8.1.4.

f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^p$ a pour matrice jacobienne en $a \in \mathbb{R}^3$ $J_f(a)$.

1. p=4 et g est la projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur $vect(0,1,0,0)$ identifié à $\mathbb{R}$. Quelle est la matrice jacobienne de gof en a en fonction des lignes de la matrice $J_f(a)$?
2. p=1 et g est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à t associe $t.a$. Quelle est la matrice jacobienne de fog en fonction de $J_f(ta)$ pour $a = (1,2,1)$?

1. g est une application linéaire, selon l'exemple de référence (8.2)

$$J_{gof}(a)) = J_g J_f(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} J_f(a)$$

On obtient donc la seconde ligne de la matrice $J_f(a)$.
2.g est une application linéaire, la matrice jacobienne de g en a, selon l'exemple de référence (8.2), est identique à celle de g :
$J_g(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Puisque g(t)=ta, la matrice jacobienne de la composée en t est donc $J_f(ta)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8.1.2.5 Dérivées partielles

Principe
La différentielle d'une fonction numérique f d'une variable réelle est caractérisée par le coefficient réel $f'(a)$ que l'on peut identifier à une matrice (1-1). Il s'agit maintenant de calculer la matrice jacobienne d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ définie par son expression en fonction des variables : x_1, $x_2 \cdots x_n$. Nous savons que, E étant rapporté à la base $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ **les colonnes de la matrice de l'application linéaire $\mathbf{Df_a}$ sont les vecteurs $\mathbf{Df_a(e_j)}$.**

8.1.2.6 Dérivées partielles

Principe
Dès que l'on introduit les dérivées partielles, on suppose donnée une base[1] $(e_1, e_2 \cdots, e_n)$ de E.

[1]Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$, on choisira généralement la base canonique

Definition 8.4.

On appelle $j^{ème}$ ***dérivée partielle de f en a****, l'image par la différentielle de f au point a du $j^{ème}$ vecteur de base .*

Notations : $D_j f(a)$ ou $\partial_j f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Théorème 8.6. *différentielle et dérivées partielles*

Supposons f différentiable au point a et notons $1 \leq j \leq n$ $D_j f(a)$ les n dérivées partielles de f en a, la différentielle de f en a appliquée au vecteur $h = \sum_{j=1}^{j=n} h_j e_j$ s'exprime en fonction des dérivées partielles en a sous la forme :

$$Df_a(h) = Df_a(\sum_{j=1}^{j=n} h_j e_j) = \sum_{j=1}^{j=n} h_j D_j f(a) \tag{8.3}$$

et on étudie successivement les n dérivées directionnelles dans la direction de chacun des vecteurs de base, c'est à dire n fonctions d'une variable $(t \mapsto f(a + te_i) = (f(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \cdots, a_n))$.
Autres notations :

$$\sum_{j=1}^{j=n} h_j D_j f(a) \text{ ou } \quad \sum_{j=1}^{j=n} h_j \partial_j f(a) \text{ ou } \sum_{j=1}^{j=n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Definition 8.5.

Nous appelons $j^{ème}$ application partielle de f au point $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, la fonction d'une variable :

$$u \mapsto f_{j,a}(u) = f(a_1, a_2, \cdots a_{j-1}, u, a_{j+1}, \cdots, a_n)$$

Proposition 15.

La $j^{ème}$ dérivée partielle de f en a, $D_j f(a)$, coïncide avec la dérivée de l'application partielle $f_{j,a}$ au point a_j.

démonstration. La définition de la dérivée de $f_{j,a}$ en a_j par le taux d'accroissement coïncide avec la définition de $D_j f(a)$. □

Conséquence

La dérivée partielle $D_j f(x)$ est la dérivée d'une fonction d'une variable $u \mapsto f(x_1, ., x_{j-1}, u, x_{j+1}., x_n)$ prise en $u = x_j$.

Si on note de manière identique la variable x_j de l'application partielle $f_{j,x}$ au point $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, et les autres coordonnées de x supposées fixées :

$$f_{j,x} : (x_j \mapsto f(x_1, ., x_{j-1}, x_j, x_{j+1}., x_n))$$

Théorème 8.7. *règle pratique de calcul des dérivées partielles*

Le calcul de la dérivée partielle $D_j f(x)$ se fait en dérivant par rapport à "la variable x_j", "les ***autres variables****", jouant le rôle de* ***paramètres****, momentanément "fixées".*

Exemple 8.1.5. :

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = {x_1}^2 \sin \dfrac{x_2}{x_1} & x_1 \neq 0 \\ f(0, x_2) = 0 \end{cases}$$

1.Etudier les dérivées partielles de f en $a = (x_1, x_2)$ lorsque $x_1 \neq 0$, puis lorsque $x_1 = 0$.

1. Si $a = (x_1, x_2)$ avec $x_1 \neq 0$, $f_{1,a}$ (resp. $f_{2,a}$) est dérivable en x_1 (resp. en x_2) donc f admet des dérivées partielles en a :

$$D_1 f(a) = 2x_1 \sin \frac{x_2}{x_1} - x_2 \cos \frac{x_2}{x_1} \quad \text{et} \quad D_2 f(a) = x_1 \cos \frac{x_2}{x_1}.$$

2. Si $a = (0, x_2)$, on peut remarquer directement que l'application partielle $f_{2,a}$ est nulle donc dérivable en x_2 de dérivée nulle, en conséquence $D_2 f(a) = 0$. $f_{1,a}(u) = f(u, x_2) = u^2 \sin \dfrac{x_2}{u}$ si $u \neq 0$ et 0 en 0. Son taux d'accroissement en 0 est $u \sin \dfrac{x_2}{u}$ qui a pour limite 0 en 0[1] et $D_1 f(a) = 0$

[1] que x_2 soit nul ou pas

Remarque

Dans une toute première approche nous privilégierons la notation $D_j f(a)$, qui évite certaines ambiguïtés. En effet, que vaut $\dfrac{\partial W}{\partial I}$ selon que l'on écrit les lois d'Ohm sous la forme $W = RI^2$ ou $W = EI$ ou $W = \frac{E^2}{R}$?

Etude pratique de la différentiabilité en un point a

On donnera, en (**??**), une condition suffisante de différentiabilité qui est très simple à vérifier. Lorsque cette condition n'est pas vérifiée, selon (8.1.2.1) on pourra conclure en calculant les dérivées partielles en a puis en étudiant la limite lorsque h tend vers 0_E de ε où :

$$\varepsilon(h) = \frac{1}{\parallel h \parallel}\left[f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{j=n} h_j D_j f(a)\right]$$

8.1.2.7 Dérivée directionnelle

Nous nous intéressons ici à l'accroissement de f dans une direction donnée : $h = tv \quad t \in \mathbb{R}$. Dans un second temps nous observerons les cas $v = e_j$, $1 \leq j \leq n$.

Soit v un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Dès que f est définie sur un ouvert U qui contient une boule de centre a et de rayon r, on peut introduire la restriction $f_{v,a}$ de f à $\{a + tv / t \in \mathbb{R}\}$. $f_{v,a}$ est la fonction d'une seule variable définie sur un ouvert qui contient]-r',r'[avec $r' = r\|v\|^{-1}$

$$t \in]-r', r'[\qquad t \mapsto f(a+tv)$$

Definition 8.6.

Si l'application $f_{v,a}(t \mapsto f(a+tv))$ est dérivable en 0, on dit que f admet en a une ***dérivée directionnelle*** *dans la direction du vecteur v de $\mathbb{R}^n$. Cette dérivée est alors notée $D_v f(a)$:*

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

Théorème 8.8. *dérivée directionnelle et différentielle*

Si f est différentiable en a, alors f admet une dérivée directionnelle dans la direction de tout vecteur v et

$$D_v f(a) = Df_a(v)$$

démonstration.

$t \mapsto f(a+tv) - f(a) = tDf_a(v) + |t|\varepsilon(tv)$ où $\underset{t \to 0}{lim}\, \varepsilon(tv) = 0$

$f_{v,a}$ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 et est donc dérivable en zéro, de dérivée $Df_a(v)$ □

8.1.3 Calcul différentiel à l'ordre 1

Un des outils essentiels du calcul pratique des différentielles est le calcul des matrices jacobiennes.

8.1.3.1 Matrice jacobienne et dérivées partielles

Le travail théorique précédant nous permet maintenant d'écrire la matrice jacobienne d'une application à l'aide des dérivées partielles :

Théorème 8.9. *Règle pratique expression de la matrice jacobienne*

- La matrice jacobienne $J_f(a)$ de f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ a n colonnes et p lignes.
- La $j^{\text{ème}}$ colonne de $J_f(a)$ est la $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle, $D_jf(a)$.
- La $i^{\text{ème}}$ ligne de $J_f(a)$ est $J_{f_i}(a)$, matrice jacobienne en a, de la $i^{\text{ème}}$ application coordonnée de f : f_i.

démonstration. Cela résulte de la définition de la matrice jacobienne (8.3)et des propriétés de la matrice d'une application linéaire. Chaque colonne est l'image $Df_a(e_j) = D_jf(a)$ selon le théorème (8.6). Pour les lignes voir le théorème (8.16).□

1. f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $J_f(a) = (f'(a))$ (identifié à f'(a)).
2. f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$: $J_f(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ f_2'(a) \\ \vdots \\ f_p'(a) \end{pmatrix}$.
3. f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$: $J_f(a) = \big(D_1f(a)D_2f(a)...D_nf(a)\big)$.
4. f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$:

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} D_1f_1(a) & \dots D_jf_1(a) \dots & D_nf_1(a) \\ & \vdots \;\; \vdots & \\ D_1f_i(a) & \dots D_jf_i(a) \dots & D_nf_i(a) \\ & \vdots \qquad \vdots & \\ D_1f_p(a) & \dots D_jf_p(a) \dots & D_nf_p(a) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ & \vdots \qquad \vdots & \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a) & \dots \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(a) \\ & \vdots \qquad \vdots & \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(a) \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Mise en garde

Un tel tableau de dérivées partielles ne représente la matrice jacobienne de f en a que si f est différentiable en a. Il ne suffit donc pas de calculer les dérivées partielles de f en a, il faut montrer la différentiabilité en a de f.

Exemple 8.1.6.

En admettant momentanément que l'application f définie par

$$f(x,y) = (x_1^2 x_2, x_1 x_2^3)$$

est différentiable en tout point $a = (x_1, x_2)$, écrire la matrice jacobienne de f en $a = (x_1, x_2)$.

$J_f(a)$ est une matrice (2-2).
La première colonne est

$$D_1 f(a) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ x_2^3 \end{pmatrix}$$

La deuxième colonne est

$$D_2 f(a) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 3x_1x_2^2 \end{pmatrix}$$

La matrice jacobienne est :

$$\begin{pmatrix} 2x_1x_2 & x_1^2 \\ x_2^3 & 3x_1x_2^2 \end{pmatrix}$$

On vérifie que la première ligne est la matrice jacobienne de $f_1(x \mapsto x_1^2 x_2)$ et la deuxième ligne la matrice jacobienne de $f_2(x \mapsto x_1 x_2^3)$.

Exemple 8.1.7.

Vérifier que l'application f définie par

$$f(x,y) = 0 \text{ si } xy \neq 0 \qquad f(x,y) = 1 \text{ si } xy = 0$$

a des dérivées partielles nulles en $a = (0,0)$ mais n'est pas continue et donc n'est pas différentiable en a. f n'admet pas de matrice jacobienne en a.

Si $a = (0,0)$, $f_{1,a}(u) = f(u,0) = 1$ et $f_{2,a}(u) = f(0,u) = 1$, les applications partielles sont constantes donc dérivables en 0 de dérivée nulle en ce point. $D_1 f(a) = 0$ et $D_2 f(a) = 0$.
Cependant la suite (a_n) où $a_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ converge vers a alors que la suite $f(a_n)$ constante égale à 0 ne tend pas $f(a) = 1$. f n'est pas continue en a et selon le théorème (8.1), f n'est pas différentiable en a.

Cependant le calcul différentiel est un outil essentiel utilisé depuis des siècles dans des milieux très divers. Cette disparité des pratiques a généré des notations et des dispositifs de calculs très divers. La dérivation en chaîne est l'un de ces dispositifs qui évitent l'écriture et le calcul de produit de matrices jacobiennes.

8.1.3.2 Dérivation en chaîne

La dérivation en chaîne

Nous savons que les dérivées partielles de la composée sont les coefficients de la matrice jacobienne de la composée, qui s'obtient comme produit de deux matrices jacobiennes selon le théorème (8.5). La dérivation en chaîne est une forme d'écriture qui permet d'effectuer ce calcul des dérivées partielles de la composée[1] sans écrire les matrices

Théorème 8.10. *Règle pratique de la dérivation en chaîne*

La dérivation en chaîne s'appuie sur une notation condensée d'une grande efficacité.

$$\frac{\partial (gof)_i}{\partial x_k}(a) = \sum_{j=1}^{j=p} \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(a)) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a). \tag{8.4}$$

Exemple 8.1.8.

E= $\mathbb{R}^2$, F= $\mathbb{R}^3$ G= $\mathbb{R}$ $f(x,y) = (xy^2, x^2 - y, 3x)$ et $g(x,y,z) = x^3 + y^2 - z$. Sachant que f et g sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et sur $\mathbb{R}^3$. Calculer les dérivées partielles de $h = gof$ en a=(x,y).

Calcul par la dérivation en chaîne à partir de (8.4) :

$$(x,y) \overset{f}{\mapsto} (xy^2, x^2 - y, 3x) = (u,v,w) \overset{g}{\mapsto} g(u,v,w) = u^3 + v^2 - w = z \tag{8.5}$$

Notons $\bullet = f(x,y) = (xy^2, x^2 - y, 3x)$, et écrivons les coefficients des matrices jacobiennes sous la forme :

$$J_g(\bullet) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(\bullet) & \frac{\partial g}{\partial v}(\bullet) & \frac{\partial g}{\partial w}(\bullet) \end{pmatrix}, \quad J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial w}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial w}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

[1]donc d'exprimer la règle de calcul du produit de deux matrices ligne par colonnes

La dérivée partielle par rapport à la première variable s'obtient par la formule de dérivation en chaîne (8.6) déduite de (8.4) :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(\bullet)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(\bullet)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial w}(\bullet)\frac{\partial w}{\partial x}(x,y), \qquad (8.6)$$

S'appuyant toujours sur le schéma de composition (8.4) mais en privilégiant les valeurs prises par les fonctions avec $\bullet = (u, v, w)$, on obtient un autre formulation en chaîne (8.7) :

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial z}{\partial u}(\bullet)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial z}{\partial v}(\bullet)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial z}{\partial w}(\bullet)\frac{\partial w}{\partial x}(x,y) \qquad (8.7)$$

Il vient :
$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 3u^2 \times y^2 + 2v \times 2x - 1 \times 3$
$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^6 + 4x(x^2 - y) - 3 = 6x^2y^6 + 4x^3 - 4xy - 3$
Calcul direct de la matrice jacobienne :
Comparez ce dispositif de calcul à celui de la matrice jacobienne.
$J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 2y & -1 \end{pmatrix}$

$$J_g(f(x,y)) = \begin{pmatrix} 3(xy^2)^2 & 2(x^2-y) & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad J_f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2x & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où : $J_h(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^6 + 4x^3 - 4xy - 3 & 6x^3y^5 - 2x^2 + 2y \end{pmatrix}$.

Dans ce cas, il est évidemment très simple de calculer gof :
$g(f(x,y)) = x^3y^6 + x^4 + y^2 - 2x^2y - 3x$. et de faire la vérification. Dans de nombreux cas on ne connaîtra pas g par exemple et il sera nécessaire d'effectuer un calcul de composée

Remarque 8.1.3. Comparez la règle de dérivation des dérivées de la composée d'applications numériques d'une variable réelle et celle de différentielles d'applications de plusieurs variables :

$$(gof)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \cdot h \quad \text{et} \quad D(gof)_{(a)} = Dg_{f(a)} o Df_{(a)}.$$

et les images d'un élément h associé

$$h \mapsto (gof)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \cdot h \quad \text{et} \quad h \mapsto D(gof)_{(a)}(h) = Dg_{f(a)}(Df_{(a)}(h)).$$

Si le calcul de la matrice jacobienne d'une application repose sur un calcul de dérivées partielles que vous connaissez déjà(8.1.6), l'exemple (8.1.7) montre la nécessité de diposer de critères simples de différentiabilité. Ces critères passent par l'étude des applications $x \mapsto Df_{(x)}$ et $x \mapsto D_j f(x)$ et le théorème des accroissements finis présenté ci-après.

8.1.4 Théorème des accroissements finis

Nous nous donnons deux éléments $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ et $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$, de l'ouvert U de E.

Le théorème des accroissement finis donne une estimation de $f(a+h) - f(a)$ pour un accroissement h donné[1] contrôlée par les valeurs de la différentielle de f "entre a et $a+h$" alors que la connaissance de la dérivée au seul point a permet de donner un équivalent de $f(a + \Delta h) - f(a)$ lorsque h tend vers 0. Voir l'exercice (8.12)

8.1.4.1 Cas où f à valeurs scalaires

.

Definition 8.7.

On appelle ***segment d'extremités a et b*** *le sous ensemble, noté $[a, b]$, des vecteurs de E défini par :*

$$[a, b] = \{ta + (1 - t)b / t \in [0, 1]\}$$

Théorème 8.11. *application à valeurs dans $\mathbb{R}$*

Soit U un ouvert qui contient le segment $[a, b]$, f une application de U dans $\mathbb{R}$ différentiable[2] en tout point de $[a, b]$ alors :

$$\exists c \in]a, b[\quad / \quad f(b) - f(a) = Df_c(b - a) \qquad (8.8)$$

[2] On suppose donc f différentiable aux points a et b, ce n'est pas le cas pour les fonctions numériques d'une variable réelle.

Remarque 8.1.4. Ou en écrivant b sous la forme $a + h$

$$\exists \theta \in]0, 1[\quad / \quad f(a + h) - f(a) = Df_{(a+\theta h)}(b - a) \qquad (8.9)$$

[1] le terme fini est ici opposé à celui de infinitésimal

démonstration. C'est un raisonnement important.

$$t \in [0,1] \longrightarrow \varphi(t) = a + t(b-a) = x \ \in U \longrightarrow f(x) = g(t) \in \mathbb{R}$$

$$f(b) = g(1) \qquad f(a) = g(0) \qquad \exists \theta \in]0,1[\quad g(1) - g(0) = g'(\theta)(1-0)$$

On utilise les matrices jacobiennes pour écrire la différentielle de la composée.
$f(b) - f(a) = g'(\theta)$ or $(g'(\theta)) = J_g(\theta) = J_f(c)J_\varphi(\theta)$, il vient :

$$g'(\theta) = (D_1 f(c) \cdots D_n f(c) \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{i=n} D_i f(c)(b_i - a_i)$$

□

Exemple 8.1.9.
Ecrire 8.8 pour n=2, $a = (0,0), b = (\alpha, \beta)$ et $f(x,y) = \sin x \cos y$.

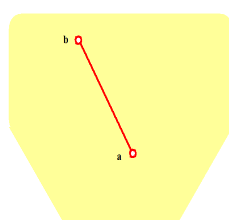
Exemple 8.1.10.
L'hypothèse f à valeurs dans $\mathbb{R}$ est nécessaire. Montrer que si l'application f est définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ par $f(x) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi x \\ \sin 2\pi x \end{pmatrix}$, il n'est pas possible d'écrire 8.8 entre les valeurs 0 et 1 de x.

Definition 8.8.
Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dit convexe si quels que soient les points a et b de U, le segment d'extrémités a et b, [a,b] est inclus dans U.

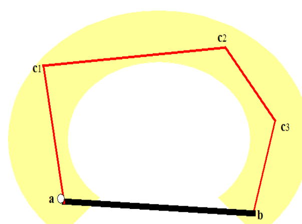
Exemple de référence 8.4.
Dans $\mathbb{R}$, les parties convexes sont les intervalles. Plus généralement t out pavé de $\mathbb{R}^n$ est convexe. Toute boule de $\mathbb{R}^n$ est convexe.

Corollaire 1.
Si U est un ouvert convexe[a] et f une application de E dans F différentiable sur U, dont la différentielle est nulle sur U, alors f est constante sur U.

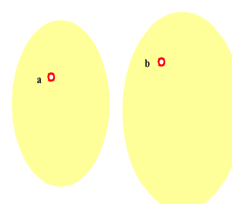
[a]le résultat reste vrai pour un ouvert connexe



convexe



non convexe - connexe



non connexe

démonstration. On applique le théorème précédent à chaque application composante. □
(E, $\| \|_E$) et (F, $\| \|_F$).
($\mathcal{L}$(E, F)), $|||\ |||$) est muni de la norme induite induite par le choix des normes $\| \|_E$ $\| \|_F$.

8.1.4.2 Cas où f à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, 1<p.

.

Théorème 8.12. *inégalité des accroissements finis*

Si U est un ouvert contenant le segment [a,b] et si f est une application définie sur U différentiable en tout point du segment [a,b] alors :

$$\| f(b) - f(a) \|_\kappa \quad \leq \sup_{x \in [a,b]} ||| Df_x |||_\kappa \| b - a \|_\kappa$$

Corollaire 2.

Soit U un ouvert convexe, f est une application différentiable sur U. Si la norme induite, notée $|||\ |||$ par les normes $\| \|_{\mathrm{E}}$ et $\| \|_{\mathrm{F}}$ de la différentielle de f sur $[a, b]$ est majorée par M alors :

$$\| f(b) - f(a) \|_{\mathrm{F}} \quad \leq M \| b - a \|_{\mathrm{E}} \,.$$

démonstration en cours

Lorsque les normes sur E et F sont les normes $\| \|_\infty$, puis sont les normes $\| \|_2$.

Applications : Montrer qu'une application différentiable, dont la différentielle est majorée est lipschitzienne, contractante.

8.1.5 Applications de classe $\mathcal{C}^k$, $1 \leq k \leq 2$

Nous conservons les notations des paragraphes précédents.

Etant donnée une application f différentiable en tout point d'un ouvert U de E à valeurs dans F, nous définissons, exactement comme dans le cas des applications numériques d'une variable réelle, ses différentielles ou dérivées successives.

8.1.5.1 Application différentielle première

Nous avons défini la différentielle en un point a de U, nous introduisons maintenant l'application différentielle.

Definition 8.9.

*f est **différentiable sur l'ouvert** U si f est différentiable en tout point de U.*
*On appelle alors **dérivée** ou **différentielle** de f sur U l'application, notée Df, de U dans $\mathcal{L}(E, F)$ qui à tout élément x de U associe Df_x, noté désormais $\mathbf{Df(x)}$.*

Exemple 8.1.11.

Si f est l'application de $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x_1, x_2) associe $\dfrac{x_1^2}{x_2}$.
Df est l'application de U dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui à $(x_1, x_2) \in U$ associe l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de matrice

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{2x_1}{x_2} & -\dfrac{x_1^2}{x_2^2} \end{pmatrix}$$

et vérifie donc

$$\forall x \in U \quad \forall h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \qquad Df(x)(h) = \Big(\frac{2x_1}{x_2}\Big)h_1 - \frac{x_1^2}{x_2^2}h_2$$

8.1.5.2 Application différentielle seconde

Definition 8.10.

*f est **deux fois différentiable en un point** a de l'ouvert U si f est différentiable sur U et si Df est différentiable en a.*
*On appelle alors **dérivée seconde** ou **différentielle seconde** de f en a l'application $D(Df)(a)$. C'est un élément de $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ noté $\mathbf{D^2f(a)}$.*

Nous définissons maintenant la différentielle seconde comme la différentielle de la différentielle. Cette définition dans un cadre abstrait généralise immédiatement celle donnée dans $\mathbb{R}$, cependant vous manipulerez pour l'essentiel les dérivées partielles

Definition 8.11.

*f est **deux fois différentiable sur l'ouvert** U si f est deux différentiable en tout point de U.*
*On appelle **dérivée seconde** ou **différentielle seconde** de f sur U l'application, notée D^2f, qui à tout élément x de U associe $D^2f(x)$.*

Voici un exemple où nous déterminons la différentielle seconde en utilisant la définition afin de mieux comprendre le théorème (8.13), vous ne le traiterez plus jamais de cette façon après les théorèmes (8.21) et (**??**).

Exemple 8.1.12. [1]

Soit f est l'application de $U = \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x_1, x_2) associe $x_1^3 + x_1x_2$. Montrer que f est deux fois différentiable et calculer D^2f

Pour tout x de $\mathbb{R}^2$ et tout $h = (h_1, h_2)$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$Df(x)(h) = (3x_1^2 + x_2)h_1 + x_1h_2$$

Pour tout x de $\mathbb{R}^2$, tout h dans $\mathbb{R}^2$ et tout $k = (k_1, k_2)$ dans $\mathbb{R}^2$:
$Df(x+k)(h) = \big(3(x_1+k_1)^2 + (x_2+k_2)\big)h_1 + (x_1+k_1)h_2$
$(Df(x+k) - Df(x))(h) = (6x_1k_1 + k_1^2 + k_2)h_1 + k_1h_2$
$(Df(x+k) - Df(x))(h) = (6x_1k_1 + k_2)h_1 + k_1h_2 + k_1\varepsilon(k)(h)$
$(D^2f(x)(k))(h) = (6x_1k_1 + k_2)h_1 + k_1h_2$
en effet $\varepsilon(k)(h) = k_1h_1$ et $||| \varepsilon(k) |||_\infty \leq \| k \|_\infty$ tend vers 0 dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ avec k.

Théorème 8.13. *la différentielle seconde comme application bilinéaire*

Toute application linéaire L de E dans $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ définit une application bilinéaire Q de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ dans F.

$$\forall (h,k) \in E \times E \qquad (L(k))(h) = Q(k,h) \in F$$

Cela permet d'identifier la différentielle seconde de f, $L = D^2f(x)$, à une application bilinéaire de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ dans F. On note alors :

$$\forall (h,k) \in E \times E \qquad (D^2f(x)(k))(h) = \mathbf{D^2f(x)(k,h)} \in F$$

[1] A la fin de ce cours il est évident que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et vous utilisez la matrice hessienne pour calculer D^2f voir l'exemple (8.1.16).

8.1.5.3 Applications de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$

Nous sommes maintenant en mesure de définir la notion d'application de classe $\mathcal{C}^1$, puis celle de classe $\mathcal{C}^2$. Ce sont les définitions que vous connaissez déjà pour les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

8.1.5.4 Définitions

Definition 8.12.

*f est **de classe $\mathcal{C}^1$ en un point** a de l'ouvert U[a] si f est différentiable sur U et si l'application Df de U dans $\mathcal{L}(E,F)$ est continue en a.*
*f est **de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert** U si elle est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point de U.*

[a] cette définition ne dépend pas du choix de l'ouvert U

Definition 8.13.

*f est **de classe $\mathcal{C}^2$ en un point** a **de l'ouvert** U[a] si f est différentiable sur U et si l'application Df de U dans $\mathcal{L}(E,F)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en a.*
*f est **de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert** U si f est de classe $\mathcal{C}^2$ en tout point de U.*

[a] cette définition ne dépend pas du choix de l'ouvert U

8.1.5.5 Opérations sur les applications

Théorème 8.14. *linéarité de la différentielle seconde*

Si f et g définies sur U à valeurs dans F, sont deux fois différentiables (resp. $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$) au point a alors pour tous réels λ et μ, il en est de même de $\lambda f + \mu g$ et $D^2(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda D^2 f(a) + \mu D^2 g(a)$.

Si f de E dans F est définie sur un ouvert U de E si g de F dans G est définie sur un ouvert V de F tel que $f(U) \subset V$, que peut-on dire de la composée.

Théorème 8.15. *composée*

Si f est deux fois différentiable (resp. $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$) en a et si g est deux fois différentiable (resp. $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$) en $b = f(a)$ alors gof est deux fois différentiable (resp. $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$) en a.

démonstration en cours. Remarquer que l'expression de $D^2(gof)(a)$ en fonction de $D^2f(a)$ et de $D^2g(f(a))$ est compliquée dès le cas où E $= \mathbb{R}$. Voir exercice (8.35)

Théorème 8.16. *coordonnées et différentielle seconde*

f est deux fois différentiable (resp. $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$) au point a si et seulement si chacune de ses applications coordonnées de f est différentiable (resp. $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$)au point a. Soit $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, ..., e'_p)$ une base de F *:*

$$f = (f_1, f_2, \cdots, f_p) \quad \Rightarrow D^2 f(a) = (D^2 f_1(a), D^2 f_2(a), \cdots, D^2 f_p(a))$$

Théorème 8.17. *produits et différentielle seconde*

Le produit, λf, d'une application numérique[a], λ, et d'une application vectorielle, f, définies sur U et deux fois différentiables (resp. $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$) en a est deux fois différentiable (resp. $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$) en a.
Le produit scalaire de deux applications à valeurs dans $F = \mathbb{R}^p$ deux fois différentiables (resp. $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$) en a est deux fois différentiable (resp. $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$) en a.

[a] à valeurs dans $\mathbb{R}$

Exemple de référence 8.5.

Toute fonction polynôme de plusieurs variables de $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est deux fois différentiable sur E.
Toute fonction fraction rationnelle de plusieurs variables de $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est deux fois différentiable sur tout ouvert de son ensemble de définition.

8.1.5.6 Applications $\mathcal{C}^k$ et dérivées partielles

k est égal à 1 ou 2. Nous allons substituer à l'étude et au calcul compliqués des différentielles successives de f, l'étude et le calcul beaucoup plus simple de n dérivées partielles d'ordre 1 et de n^2 dérivées partielles d'ordre 2 de f. Nous supposons donc données des bases de E et de F.

8.1.5.7 Applications dérivées partielles d'ordre 1

Nous avons défini les dérivées partielles en un point a de U, nous définissons maintenant les applications dérivées partielles sur U.

Definition 8.14.

Si $D_j f(x)$ existe en tout point x de l'ouvert U, on dit que f admet une ***dérivée partielle d'ordre 1 sur*** *U* ***par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable****. On note $D_j f$ la $j^{ème}$* ***dérivée partielle*** *de f :*

$$x \in U \quad \mapsto D_j f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \quad \in F$$

Conséquence
Si f est différentiable sur l'ouvert U, selon l'égalité (8.3), la différentielle de f en un point x de U s'exprime en fonction des dérivées partielles en x sous la forme $h \mapsto Df(x)(h) = \sum_{j=1}^{j=n} h_j \, D_j f(x)$. Cette égalité est écrite dans l'espace vectoriel F, elle concerne l'image de h par $Df(a)$. L'égalité ci-après est une égalité fonctionnelle écrite dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Une base de E étant choisie, si on note $p_j(h) = h_j$.

$$DF(x) = \sum_{j=1}^{j=n} D_j f(x) p_j$$

Il faut savoir que les dérivées partielles vivent entre les même espaces que f et qu'il en sera donc de même des dérivées partielles successives.[1]

$$\mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{F}$$
$$\mathrm{E} \xrightarrow{Df} \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) \qquad \text{alors que } \forall i \in [1, n] \quad \mathrm{E} \xrightarrow{D_i f} \mathrm{F}$$
$$\mathrm{E} \xrightarrow{D^2 f} \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}))$$

8.1.5.8 Applications $\mathcal{C}^k$ et dérivées partielles d'ordre 1 $\mathcal{C}^{k-1}$

Nous voulons montrer que la régularité d'une application est liée à celle de ses dérivées premières. C'est un résultat essentiel mais difficile à atteindre. Nous admettons une partie des résultats.

Théorème 8.18. *applications $\mathcal{C}^k$ et dérivées partielles d'ordre 1.*

[1]Ce n'est pas le cas des différentielles successives et cette difficulté est nouvelle pour vous car dans le cas des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ a été implicitement identifié à $\mathbb{R}$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U si et seulement si f admet sur U n applications dérivées partielles premières continues sur U.
f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U si et seulement si f admet sur U n applications dérivées partielles premières de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

démonstration en cours.

Théorème 8.19. *Règle pratique Critère simple de différentiabilité*

$$\begin{array}{ccc} f \text{ différentiable} & \Longrightarrow & f \text{ a } n \text{ dérivées partielles } D_i f. \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ f \text{ de classe } \mathcal{C}^1 & \Longleftrightarrow & f \text{ a } n \text{ dérivées partielles } D_i f \text{ continues.} \end{array}$$

Exemple 8.1.13.
Montrer que l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ puis en (0,0,0)

$$\begin{cases} f(x,y) = xyLn(x^2+y^2) \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

Sur U, f est de classe $\mathcal{C}^1$ comme produit de telles applications.

$$(x,y) \in U \qquad \begin{cases} D_1 f(x,y) = yLn(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} \\ D_2 f(x,y) = xLn(x^2+y^2) + \dfrac{2y^2x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Les applications partielles en $(0,0)$ sont $x \mapsto f(x,0) = 0$ et $y \mapsto f(0,y) = 0$. Sans calculer les dérivées directionnelles cela établit directement que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et :

$$D_1 f(0,0) = 0 \qquad D_2 f(0,0) = 0$$

Soit $h = (x,y)$, $\| h \|_2 = \sqrt{(x^2+y^2)}$ et $| y | \leq \| h \|_2$.Il vient :

$$h \in U \qquad | D_1 f(x,y) | \leq 2 \| h \|_2 \, Ln(\| h \|_2) + 2 \| h \|_2 .$$

et lorsque $\| h_n \|_2$ tend vers 0, $2 \| h_n \|_2 \, Ln(\| h_n \|_2) + 2 \| h_n \|_2$ tend aussi vers 0. Donc $D_1 f$ est continue en (0,0). Il en est de même pour $D_2 f$.

8.1.5.9 Définition et calcul des dérivées partielles d'ordre 2

Definition 8.15.

Si $D_i(D_j f)(x)$ existe en un point x de U, on dit que f admet une ***dérivée partielle d'ordre 2 en x*** *obtenue en dérivant par rapport à la $j^{\text{ème}}$ et la $i^{\text{ème}}$ variable. On note $\mathbf{D_{ij}f(x) = D_i(D_jf)(x)}$ ou $\dfrac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x_i} \partial \mathbf{x_j}}$ ou $\partial_{\mathbf{ij}}\mathbf{f(x)}$*

Si $D_{ij}f(x)$ existe en tout point x de U, on dit que f admet une ***dérivée partielle d'ordre 2 sur*** *U, notée $D_{ij}f$, c'est l'application :*

$$x \in U \quad \mapsto D_{ij}f(x) \quad \in F$$

Théorème 8.20.

Si f est deux différentiable sur l'ouvert U de E à valeurs dans F, selon l'égalité (8.3), la différentielle seconde de f sur U s'exprime en fonction des dérivées partielles secondes de f sur U sous la forme :

$$(h,k) \mapsto D^2 f(x)(h,k) = \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} h_i k_j \, D_{ij} f(x) \in \mathrm{F}$$

Remarquer que en notant toujours p_j l'application $h \mapsto p_j(h) = h_j$ et en introduisant la base $p_j p_i$ de $\mathcal{L}(\mathrm{E}\times\mathrm{E},\mathrm{F})$, on peut écrire l'égalité fonctionnelle dans $\mathcal{L}(\mathrm{E}\times\mathrm{E},\mathrm{F})$.

$$D^2 f(x) = \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} D_{ij} f(x) p_j p_i \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\times\mathrm{E},\mathrm{F}) \tag{8.10}$$

Exemple 8.1.14.
Calcul de dérivées partielles d'ordre 2 en dérivant deux fois
U$= \mathbb{R}^3$, f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto f(x) = x_2 \sin(x_1 x_3)$$

réponse :
$D_{13}f(x) = -x_1 x_2 x_3 \sin(x_1 x_3)$, $D_{23}f(x) = x_1 \cos(x_1 x_3)$.

Calcul de dérivées partielles d'ordre 2 d'une application composée

Exemple 8.1.15. passage des coordonnées cartésiennes aux cordonnées en polaires
Soit g une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, $((x,y) \mapsto g(x,y))$. On définit l'application composée $h = gof$ où $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Exprimer les dérivées partielles de $h = gof$ en fonction des dérivées partielles de g.

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi[& \mapsto & \mathbb{R}^2 & \mapsto \quad \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) = f(r,\theta) = (x,y) \mapsto g(x,y) & & \end{array}$$

solution

1. Commençons par les dérivées partielles d'ordre 1. L'égalité matricielle :

$$J(gof)(r,\theta) = \begin{pmatrix} D_1g(f(r,\theta)) & D_2g(f(r,\theta)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

et

$$J(gof)(r,\theta) = \begin{pmatrix} D_1(gof)(r,\theta) & D_2(gof)(r,\theta) \end{pmatrix}$$

s'écrit

$$D_1(\mathbf{gof})(r,\theta) = \big((\mathbf{D_1g})of\big)(r,\theta)\cos\theta + \big((\mathbf{D_2g})of\big)(r,\theta)\sin\theta \quad (8.11)$$

$$D_2(gof)(r,\theta) = \big((D_1g)of\big)(r,\theta)(-r)\sin\theta + \big((D_2g)of\big)(r,\theta)r\cos\theta \quad (8.12)$$

2. Calculons maintenant de $D_{11}(gof)$, en utilisant la définition (8.15), c'est à dire $D_{11}(gof) = D_1(D_1(gof))$:
   (a) En appliquant D_1 aux deux membres de l'égalité (8.11) et en utilisant la linéarité de cet opérateur de dérivation par rapport à la première variable r :

$$D_1\big[D_1(gof)\big](r,\theta) =$$
$$D_1\big[(D_1g)of\big](r,\theta)\cos\theta + D_1\big[(D_2g)of\big](r,\theta)\sin\theta$$

   (b) En appliquant la règle de dérivation $g \mapsto D_1(gof)$ explicitée par l'égalité (8.11), non plus à g mais à $G = D_1g$, on obtient :

$$D_1(Gof)(r,\theta) = \big((\mathbf{D_1G})\mathbf{of}\big)(\mathbf{r},\theta)\mathbf{cos}\theta + \big((\mathbf{D_2G})\mathbf{of}\big)(\mathbf{r},\theta)\sin\theta.$$

   Soit compte tenu de $D_1G = D_{11}g$ et de $D_2G = D_{21}g$:

$$D_1((\mathbf{D_1g})\mathbf{of})(r,\theta) = (\mathbf{D_{11}g})of(r,\theta)cos\theta + (\mathbf{D_{21}g})of(r,\theta)\sin\theta.$$

(c) En appliquant la règle de dérivation $g \mapsto D_1(gof)$ explicitée par l'égalité (8.11), non plus à g mais à D_2g, on obtient :

$$D_1((\mathbf{D_2g})\mathbf{oh})(r,\theta) = (\mathbf{D_{12}g})of(r,\theta)\cos\theta + (\mathbf{D_{22}g})of(r,\theta)\sin\theta.$$

(d) La somme donne l'expression de la dérivée partielle d'ordre 2 obtenue en dérivant deux fois par rapport à la première variable la fonction composée gof en fonctions des dérivées partielle d'ordre 2 de g elles mêmes composées avec f :

$$D_{11}(gof)(r,\theta) = (D_{11}g)of(r,\theta)\cos^2\theta + 2(D_{12}g)of(r,\theta)\sin\theta\cos\theta. \quad + \\ (D_{22}g)of(r,\theta)\sin^2\theta.$$

3. De même montrer en prenant garde que $D_2(\cos\theta) = -\sin\theta$:

$$D_{22}(goh)(r,\theta) = (D_{11}g)oh(r,\theta)r^2\sin^2\theta - 2(D_{12}g)oh(r,\theta)r^2\sin\theta\cos\theta \quad + \\ (D_{22}g)oh(r,\theta)r^2\cos^2\theta - (D_1g)oh(r,\theta)rcos\theta - (D_2g)oh(r,\theta)rsin\theta$$

8.1.5.10 Applications $\mathcal{C}^2$ et dérivées partielles d'ordre 2

Théorème 8.21. *applications $\mathcal{C}^2$ et dérivées partielles d'ordre 2*

f est de classe $\mathcal{C}^2$ en un point x de l'ouvert U si et seulement si f admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues en x. Vous devez donc savoir :

$$\begin{array}{ccc} f \text{ deux fois différentiable} & \Longrightarrow & f \text{ a } n^2 \text{ dérivées partielles } D_{ij}f. \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ f \text{ de classe } \mathcal{C}^2 & \Longleftrightarrow & f \text{ a } n \text{ dérivées partielles } D_if \text{ de classe } \mathcal{C}^1. \end{array}$$

Théorème 8.22. *Théorème de Schwarz*[1]

Si f est une application de classe $\mathcal{C}^2$ en un point x de l'ouvert U, alors

$$\forall i \in [1,n] \quad \forall j \in [1,n] \quad D_{ij}f(x) = D_{ji}f(x)$$

$D^2f(x)$ définit alors une application bilinéaire symétrique de E × E *dans* F

[1] Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) *fonctions analytiques, fonctions de plusieurs variables*(1873).

notation On note $D^2 f_{(a)}(h,k)$, au lieu de $D^2 f_{(a)}(h)(k)$

Alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U, en tout point x de U, $D^2 f(x)$ est une application bilinéaire symétrique de $E \times E$ dans F :

$$(h,k) \in E \times E \mapsto D^2 f_{(x)}(k)(h) \in F$$

Definition 8.16. *matrice hessienne*

Supposons f $\mathcal{C}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on appelle alors ***matrice hessienne*** *de f en un point x de U et on note $\mathcal{H}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ la matrice de la forme bilinéaire symétrique $D^2 f(x)$ dans la base $\mathcal{E}$ de (E).*

Théorème 8.23. *Règle pratique*

La matrice hessienne d'une application de classe $\mathcal{C}^2$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est une matrice carrée d'ordre n
Les coefficients de la matrice hessienne de f en x, $\mathcal{H}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$, sont $D_{ij} f(x)$

démonstration. Selon (8.10) :

$$D^2 f(x)(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\ell=1}^{\ell=n} D_{k\ell} f(x) p_k(e_i) p_\ell(e_j) = D_{ij} f(x)$$

car $\quad p_k(e_i) = \delta_{ki} \quad$ et $\quad p_\ell(e_j) = \delta_{\ell j}$

$$\mathcal{H}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} D_{11} f(x) & D_{12} f(x) & \cdots & D_{1n} f(x) \\ D_{12} f(x) & D_{22} f(x) & & D_{2n} f(x) \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ D_{1n} f(x) & D_{2n} f(x) & \cdots & D_{nn} f(x) \end{pmatrix}$$

□

Exemple de référence 8.6. *une technique de calcul que vous devez absolument maîtriser*

Montrer que f définie par $f(x_1,x_2)=x_1^3+x_1x_2$ est deux fois différentiable et calculer $D^2f(x)(h,k)$. C'est l'exercice (8.1.12) ici résolu avec la hessienne.
Selon l'exemple de référence (8.5), f, fonction polynôme des variables x_1 et x_2, est de classe $\mathcal{C}^2$ donc est deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

$$J_f(x)=\begin{pmatrix} 3x_1^2+x_2 & x_1 \end{pmatrix} \qquad H_f(x)=\begin{pmatrix} 6x_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad D^2f(h,k)=\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6x_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6x_1k_1+k_2 \\ k_1 \end{pmatrix}=D^2f(h,k)=(6x_1k_1+k_2)h_1+k_1h_2$$

Exemple 8.1.16.
Déterminer l'application f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ sachant que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-xy$$

et que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=x$ et $f(0,y)=1$.

Réponse[a] :

$$D_1f(x,y)-D_1f(x,0)=\int_0^y D_2(D_1f)(x,s)ds=\int_0^y(-xs)ds=-x\frac{y^2}{2}$$

$$\Rightarrow D_1f(x,y)=x-x\frac{y^2}{2}$$

$$f(x,y)-f(0,y)=\int_0^x D_1f(s,y)ds=\int_0^x s(1-\frac{y^2}{2})ds=\frac{x^2}{2}(1-\frac{y^2}{2})$$

$$\Rightarrow f(x,y)=1+\frac{x^2}{2}(1-\frac{y^2}{2}).$$

[a] ou avec les notations de l'énoncé :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=\int_0^y(-xs)ds=-x\frac{y^2}{2}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=x-x\frac{y^2}{2}$$

8.1.6 Difféomorphisme

On substitue souvent à l'étude d'un problème donné un autre problème, en utilisant une bijection φ, c'est la technique dite du "changement de variable" exposée dans l'exercice (8.18). Si les conditions d'étude de ce problème nécessitent une certaine régularité de φ (de classe $\mathcal{C}^k$) la réciproque sera-elle aussi régulière ? c'est l'objet du théorème qui suit :

Théorème 8.24. *régularité de la réciproque d'une bijection*

Si f est une application bijective de l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$ sur l'ouvert[a] V de $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, où k est un entier égal à 1 ou 2. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1 f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur V.

2 En tout point x de U, $Df(x)$ est un isomorphisme. L'isomorphisme réciproque est la différentielle de f^{-1} en $f(x)$.

démonstration.
Nous montrons seulement dans ce cours, que la condition (1) implique (2). Si la condition (1) est réalisée, f^{-1} est différentiable sur V et le théorème de composition permet d'écrire que (8.15) :

$$\begin{cases} f^{-1}of = id_U \Rightarrow \forall x \in U \text{ si } \quad y = f(x) \quad D(f^{-1})(y)oDf(x) = id_E \\ fof^{-1} = id_V \Rightarrow \forall y \in V \text{ si } \quad x = f^{-1}(y) \quad Df(x)oD(f^{-1})(y) = id_F \end{cases}$$

En conséquence la différentielle $DF(x)$ de f en chaque point x de U est bijective, c'est donc un isomorphisme, de plus la différentielle de f^{-1} en $f(x)$ est bien l'isomorphisme réciproque de la différentielle de f en x :

$$\forall x \in U \qquad (Df(x))^{-1} = D(f^{-1})(f(x))$$

□

Remarque
En particulier nécessairement dim E= dim F, ce que nous supposons donc dans la définition qui suit.

Definition 8.17.

*Soient k un entier égal à 1 ou 2, U un ouvert de E , V un ouvert de F tels que dim E= dim F et f une bijection de classe $\mathcal{C}^k$ de U sur V. Nous dirons que f est un **$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U sur V** si la réciproque f^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^k$ sur V.*

---

[2]L'hypothèse V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est redondante, cette propriété résulte des autres hypothèses.

Lemme 8.1. *f bijective, Df_a bijective alors f^{-1} différentiable*

Supposons f différentiable sur un ouvert U^*, définissant une bijection de U^* sur V^* où V^* contient une boule ouverte de centre b. Si la différentielle de f en a est bijective et si f^{-1} est continue en b alors f^{-1} est différentiable en $b = f(a)$.

démonstration en cours
Pour x élément de U

$$f(x) - f(a) = Df_{(a)}(x-a) + \|x-a\|\epsilon_a(x-a) \qquad \epsilon_a \text{ continue } \epsilon_a(0_E) = 0_F$$

Ce qui s'écrit pour y élément de l'ouvert $f^{-1}(U)$

$$(Df_{(a)})^{-1}(y-b) = f^{-1}(y) - f^{-1}(b) + \|y-b\| \frac{\|x-a\|}{\|f(x)-f(a)\|} \frac{(Df_{(a)})^{-1}(\epsilon_a(x-a))}{\|f(x)-f(a)\|}.$$

8.1.6.1 Différentiabilité d'une bijection réciproque

Conséquences
Un critère pratique simple pour vérifier que la différentielle $DF(x)$ en chaque point x de U est un isomorphisme est que

$$\forall x \in U \quad \det(Jf(x)) \neq 0$$

On peut calculer la matrice jacobienne de f^{-1} comme matrice inverse de la matrice jacobienne de f en $x = f^{-1}(y)$.

Exemple 8.1.17. U=$\mathbb{R}^2$, V=$\mathbb{R}^2$ et $f(x,y) = (x+y, xy)$ et soit $a = (x_a, y_a)$ un élément de $\mathbb{R}^2 \setminus \triangle$ où $\triangle = \{(x,x)/x \in \mathbb{R}\}$
Déterminer le plus grand ouvert ouvert U^* contenant a tel que f définisse un difféomorphisme de U^* sur $f(U^*)$.

Exemple de référence 8.7. *changement de coordonnées en polaires*

$(r,\theta) \longrightarrow (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de $U_1 = \mathbb{R}^{+*} \times \;]\; \pi \;,\; \pi \;[$ sur $V_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 0\}$.

En effet :

1. *f est bijective et la réciproque s'obtient alors en écrivant :*

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

2. *f est de classe $\mathcal{C}^2$,*

$$J_f(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

3. *le jacobien de f égal à r ne s'annule pas sur U.*

$$J_f^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Exemple de référence 8.8. *changement de coordonnées en cylindriques*

$(r,\theta,z) \longrightarrow (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ de $U = U_1 \times \mathbb{R}$ sur $V = V_1 \times \mathbb{R}$.

Exemple de référence 8.9. *changement de coordonnées en sphérique*

$(r,\theta,\varphi) \longrightarrow (r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi)$ de $U = U_1 \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(x,0,z)/x \leq 0\}\}$ est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme.

1. *f est bijective la réciproque s'obtient en écrivant*

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad \varphi = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

2. *f est de classe $\mathcal{C}^2$ car ses composantes sont $\mathcal{C}^1$.*
3. *le jacobien de f ne s'annule pas sur U en effet $J_f(r,\theta,\varphi)$ a pour déterminant $r^2\cos\varphi$:*

$$J_f(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

8.1.7 Exemple d'opérateurs différentiels

données :
$(\mathbb{R}^n, \| \|)$ l'espace euclidien canonique et $(u \mid v)$ le produit scalaire associé.

Definition 8.18.

*En analyse vectorielle[a], une application F d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est appelée un **champ de vecteurs** et est notée $\overrightarrow{F}$.*

[a] Les outils de l'analyse vectorielle" ont été mis au point par Gibbs (1839-1903) et Heaviside (1850-1925). Ces opérateurs différentiels, exprimés à l'aide des dérivées partielles, sont tous indépendants d'un changement de repère orthonormé. C'est dans ce cadre de travail que l'on écrit jusqu'à Levi-Civita(1873-1941) et Elie Cartan (1869-1951) les formules de physique théorique, telles les formules de Stokes

Definition 8.19. *divergence d'un champ de vecteurs*

Supposons $\overrightarrow{F}$ *définie sur l'ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$. *Si* $\overrightarrow{F}$ *est différentiable en un point* x *de* U, *la trace de l'endomorphisme* $D\overrightarrow{F}(x)$ *de* R^n *est appelée la* ***divergence du champ de vecteurs*** $\overrightarrow{F}$ *en* x, *notée div* $\overrightarrow{F}(x)$ *ou* $\nabla \cdot \overrightarrow{F}(x)$

$$div\overrightarrow{F}(x) = \sum_{i=1}^{n} D_i F_i(x)$$

Si $\overrightarrow{F}$ *est différentiable sur* U, $\nabla \cdot \overrightarrow{F}$ *définit une application numérique sur* U *appelée divergence de* $\overrightarrow{F}$.

Definition 8.20. *gradient d'une fonction numérique*

Si f *est une application de l'espace euclidien* $(\mathbb{R}^n, \| \|)$ *dans* $\mathbb{R}$ *différentiable en* x, *il existe un unique vecteur noté* $\overrightarrow{grad\,f}(x)$ *ou* $\nabla f(x)$, *appelé* ***gradient de f en x*** *tel que :*

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \quad Df_x(v) = (\overrightarrow{grad\,f}(x) \mid v)$$

La matrice colonne de ce vecteur dans une base orthonormale de $(\mathbb{R}^n, \| \|)$ *est* ${}^tJ_f(x)$.

Si f *est différentiable sur l'ouvert* U, $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{grad\,f}$ *définit un champ de vecteurs sur* U *appelé gradient de* f. *On dit que le champ de vecteurs* $\overrightarrow{F}$ *dérive du* ***potentiel*** f.

Definition 8.21. *laplacien d'une fonction numérique*

Si f *est une application de* $(\mathbb{R}^n, \| \|)$ *dans* $\mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur l'ouvert* U, *on appelle* ***laplacien de*** f *l'application numérique, notée* Δf, *définie sur* U *par :*

$$\Delta f = div(\overrightarrow{grad\,f})$$

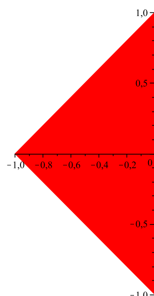
Definition 8.22. *rotationnel d'un champ de vecteurs de* $\mathbb{R}^3$

Si $\overrightarrow{F} = (F_1, F_2, F_3)$ *est différentiable sur l'ouvert* U *de* $\mathbb{R}^3$, *on appelle* ***rotationnel de*** $\overrightarrow{F}$ *sur* U *et on note* $\overrightarrow{rot\,F}$ *ou* $\nabla \wedge F$, *le champ de vecteurs définie sur* U *par :*

$$\overrightarrow{rot\,F} = (D_2F_3 - D_3F_2 \quad , \quad D_3F_1 - D_1F_3 \quad , \quad D_1F_2 - D_2F_1).$$

8.1.8 Extrema d'une application numérique

On cherche à caractériser les extrema (maxima ou minima) sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$ d'une application f, à valeurs dans $\mathbb{R}$.



Exemple 8.1.18. Par exemple si $n = 2$ et si A est le triangle (y compris les bords) de $\mathbb{R}^2$ ci-représenté avec

$$f(x, y) = xy(1 + x + y)$$

f étant continue sur A et A étant fermé et borné, f admet un maximum M et un minimum m sur A[a]. Pour répondre à la question que vaut M, nous cherchons à caractériser les points x de A où f prend la valeur M. En utilisant la différentiabilité de f, puis f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U qui contient A, on obtient des techniques simples pour déterminer ces points.

[a]chapitre espaces vectoriels normés

Ces techniques généralisent ce que vous connaissez déjà sur $\mathbb{R}$: recherche des zéros de la dérivée (resp. de la différentielle) puis étude du signe (resp. de la signature) de la dérivée seconde (resp. de la hessienne). Ces techniques évitent de travailler directement sur les inégalités - faites la recherche sans ces techniques sur l'exemple (8.1.18) !-, par contre ces techniques, liées à la régularité de f, qui est une notion locale, ne donnent pas les points x de A où f atteint ses extremas mais tous les points x où f atteint un extrema local, notion que nous introduisons ci-après en précisant les liens entre extrema absolu et extrema local.

8.1.8.1 Recherche des extrema absolus parmi les extrema locaux

Definition 8.23.

*1. f a un **maximum sur A** (ou maximum absolu) atteint en a, si*

$$\forall x \in A \quad f(x) \leq f(a).$$

Ce maximum est strict si de plus $\quad \forall x \in A \setminus \{a\} \quad f(x) < f(a).$

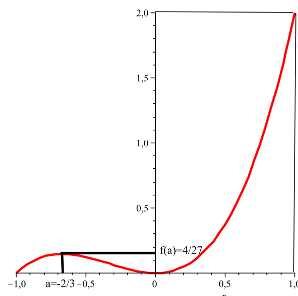
2. f a un ***minimum sur A*** *(ou minimum absolu) atteint en a, si*

$$\forall x \in A \quad f(a) \leq f(x).$$

Ce minimum est strict si de plus $\forall x \in A \setminus \{a\} \quad f(a) < f(x).$

Definition 8.24.

f présente en a un ***maximum local sur A*** *s'il existe une boule ouverte B de centre a et de rayon r telle que : $\forall x \in B \quad x \in A \quad$ et $\quad f(x) \leq f(a)$.*
f présente en a un ***minimum local sur A****, s'il existe une boule ouverte B de centre a et de rayon r, telle que : $\forall x \in B \quad x \in A \quad$ et $\quad f(a) \leq f(x)$.*



Exemple 8.1.19.

$$U = \mathbb{R} \qquad A = [-1, 1] \qquad f(x) = x^2 + x^3$$

Le maximum absolu est 2 atteint en 1
Le minimum absolu est 0 atteint en -1 et en 0
f a un maximum local en $a = -\dfrac{2}{3}$ égal à $\dfrac{4}{27}$

Montrer directement (voir l'exercice corrigé (8.40)) que l'on a un extremum local peut s'avérer délicat, on donnera une technique qui "s'applique presque toujours" à la fin de cette étude, c'est la règle pratique (8.32).

Si f présente un extremum local en a nécessairement il existe une boule de centre a incluse dans A. Nous devons maintenant mentionner que si un ensemble A n'est pas ouvert, A contient des points pour lesquels cette propriété n'est pas réalisée, on dit qu'ils sont "au bord" de A. Dans le cas d'un intervalle I, le "bord" de I est constitué des extrémités de I que I contient. Le terme mathématique qui correspond à la notion intuitive de "bord" est celui de "frontière" :

Definition 8.25.

Un point a de A est sur la ***frontière*** *de A s'il n'existe pas de boule de centre a incluse dans A .*

Remarque 8.1.5.
A est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ si sa frontière (son bord) est vide.

Théorème 8.25. *extremum absolu et extremum local*

Supposons A ouvert, alors tout extremum absolu sur A est un extremum local sur A .

Supposons A non ouvert, alors si $f(a)$ est un extremum absolu sur A :

$$\begin{cases} \text{soit } f(a) \text{ est un extremum local sur } A \\ \text{soit } a \text{ est un point "du bord de } A\text{"} \end{cases}$$

8.1.8.2 Recherche des extrema locaux et différentielle

Nous savons déjà dans le cas des fonctions d'une variable réelle que les zéros de la dérivée permettent de déterminer les extrema locaux sur un intervalle ouvert. Nous appellerons désormais un tel point, un point critique ou stationnaire.

Definition 8.26. *point critique ou point stationnaire*

*Si f est différentiable, on appelle **point critique** ou **point stationnaire** de f tout point en lequel la différentielle de f s'annule.*

Exemple 8.1.20.
Rechercher les points critiques de la fonction f définie sur $U = \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xy(1+x+y)$ (exemple (8.1.18)).

réponse :

On résout $\begin{cases} D_1 f(x,y) = y(1+x+y) + xy = 0 \\ D_2 f(x,y) = x(1+x+y) + xy = 0 \end{cases}$.

f a 4 points critiques :

$a_0 = (0,0), a_1 = (-1,0), a_2 = (0,-1), a_3 = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

Théorème 8.26.

Supposons f différentiable en a, alors si f admet un extremum local sur A en a nécessairement a est un point critique de f.

démonstration.
Dans le cas d'un maximum local en a :

$$\exists r > 0 / \parallel h \parallel < r \Rightarrow a + h \in A \quad et \quad f(a+h) \leq f(a).$$

Soit v un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et $\eta = \dfrac{r}{\parallel v \parallel}$ on peut considérer l'application f_V d'une variable qui donne l'accroissement de f dans la direction V sur la boule de centre a et de rayon r :

$$\begin{aligned}]-\eta, \eta[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow f(a+tv). \end{aligned}$$

f étant différentiable en a, f_V admet une dérivée en 0, la dérivée directionnelle, selon la définition 8.4 $D_V f(a)$, qui est égale à $Df_a(v)$.
Or l' application f_V de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admet un maximum relatif en 0 puisque

$$\mid t \mid < \eta \Rightarrow \parallel tv \parallel < r \quad et \quad f(a+th) \leq f(a).$$

Nous savons d'après l'étude des fonctions numériques d'une variable réelle que la dérivée de f_V en 0 est nulle. D'où

$\forall v \in \mathbb{R}^n \, Df_a(v) = 0,$: la différentielle de f en a est l'application linéaire nulle. □

Attention *cette condition n'est pas suffisante*
Par exemple pour n=1, U=$\mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ et a=0 on a :
En 0 la dérivée de f s'annule sans que f ne présente d'extremum relatif en 0.
En effet : x<0 ⇒ f(x)< f(0) et 0<x ⇒ f(0)<f(x)

Théorème 8.27. *Règle pratique recherche d'extrema locaux*

Les extremums locaux d'une application quelconque f sont à chercher parmi les points critiques de f et les points où f n'est pas différentiable.

8.1.8.3 Formule de Taylor

On suppose ici f différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ qui contient a et de classe $\mathcal{C}^2$ en a. $\mathbb{R}^n$ est rapporté à la base canonique. On se propose de généraliser la notion de polynôme de Taylor à l'ordre 2 :

$$h \in \mathbb{R} \mapsto P_{2,f,a}(h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2$$

que vous utilisez pour évaluer $f(x)$ lorsque f est une fonction d'une variable réelle.

Definition 8.27. *polynôme de Taylor d'ordre 2 de f*

Le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f au point a *est le polynôme de n variables de degré 2 défini par :*

$$h \in \mathbb{R}^n \mapsto P_{2,f,a}(h) = f(a) + Df(a)(h) + \frac{1}{2}D^2f(a)(h,h) \tag{8.13}$$

Ecriture polynomiale à l'aide des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en a et des cordonnées h_i de h.

$$h \in \mathbb{R}^n \mapsto P_{2,f,a}(h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i D_i f(a) + \frac{1}{2!}\sum_{1\le i,j\le n} h_i h_j D_{ij} f(a) \tag{8.14}$$

Ecriture matricielle à l'aide des matrices jacobiennes et hessiennes en a et de la matrice colonne H de h

$$h \in \mathbb{R}^n \mapsto P_{2,f,a}(h) = f(a) + J_f(a)H + \frac{1}{2}{}^t H\mathcal{H}_f(a)H \tag{8.15}$$

Exemple 8.1.21.
Si $f(x,y,z) = 3x^3 - x + 3y^3 - y + 3z^3 - z$, déterminer le polynôme de Taylor à l'ordre 2 de f en $a = (0,0,0)$ puis en $b = (1,1,1)$.

1. $f(a) = 0$
2. $\partial_1 f(x,y,z) = 6x^2 - 1 \quad \partial_2 f(x,y,z) = 6y^2 - 1 \quad \partial_3 f(x,y,z) = 6z^2 - 1$

$$\text{et} \qquad J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x^2-1 & 6y^2-1 & 6z^2-1 \end{pmatrix}$$

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. $\partial_{11} f(x,y,z) = 12x \quad \partial_{22} f(x,y,z) = 12y \quad \partial_{33} f(x,y,z) = 12z$

$\partial_{ij} f(x,y,z) = 0$ si $i \neq j$ et $\mathcal{H}_f(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. (8.13)$\Rightarrow P_{2,f,a}(h) = f(a) + Df(a)(h)$ car $D^2f(a)$ est nulle

(8.14)$\Rightarrow P_{2,f,a}(u,v,w) = u(-1) + v(-1) + w(-1) = -u - v - w$ si $h = (u,v,w)$

(8.15)$\Rightarrow P_{2,f,a}(u,v,w) \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = -u - v - w$

5. $f(b) = -6$, $J_f(b) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathcal{H}_f(b) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

$P_{2,f,b}(u,v,w) = -6 + 5u + 5v + 5w + 6u^2 + 6v^2 + 6w^2$.

Théorème 8.28. *formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2*

Soit f une application e classe $\mathcal{C}^2$ de l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, si le segment d'extremités a et $a+h$ est inclus dans U, alors $\exists \lambda \in]0,1[$

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{i=n} h_i D_i f(a) + \frac{1}{2!} \sum_{1 \leq i,j \leq n} h_i h_j D_{ij} f(a + \lambda h)$$

ou en définissant b=a+h ,$\exists c \in]a,b[$:

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{i=n} (b_i - a_i) D_i f(a) + \frac{1}{2!} \sum_{1 \leq i,j \leq n} (b_i - a_i)(b_j - a_j) D_{ij} f(c)$$

Théorème 8.29. *formule de Taylor-Young à l'ordre 2*

Si f est une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors il existe un réel strictement positif r telle que si $\| h \| < r$:

$$f(a+h) = P_{2,f,a}(h) + \| h \|^2 \varepsilon(h)$$

où $P_{2,f,a}(h)$ est le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f au point a
et où $lim_{h \to 0_{\mathbb{R}^n}} \varepsilon(h)$=0

démonstration en cours

Remarque 8.1.6. Si $f(a+h) = P_2(h) + \| h \|^2 \varepsilon(h)$ où $lim_{h \to 0_{\mathbb{R}^n}} \varepsilon(h)$=0 alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ en a et $P_2(h) = P_{2,f,a}(h)$. Cette propriété permet parfois de déterminer le polynôme de Taylor puis d'en déduire les dérivées partielles directement. Faites le pour l'exemple (8.1.21).

Exemple 8.1.22.
Si $f(x,y,z) = 3x^3 - x + 3y^3 - y + 3z^3 - z$, écrire la polynôme de Taylor-Young à l'ordre 2 de f en $a = (0,0,0)$ puis en $b = (1,1,1)$ en s'appuyant sur l'étude de l'exemple 8.1.21.

Si on choisit d'écrire Taylor-Young avec la norme $\| \|_2$
1.En a on obtient : $f(x,y,z) = -x - y - z + (x^2 + y^2 + z^2)\varepsilon(x,y,z)$.
2. En b avec $h = (u,v,w)$, on obtient : $f(1+u, 1+v, 1+w) =$

$$-6 + 5u + 5v + 5w + 6u^2 + 6v^2 + 6w^2 + (u^2 + u^2 + w^2)\varepsilon(u,v,w).$$

En b avec $h = (x-1, v = y-1, w = z-1)$, on a : $f(x,y,z) =$

$$-6 + 5(x-1) + 5(y-1) + 5(z-1) + 6(x-1)^2 + 6(y-1)^2 + 6(z-1)^2$$

$$+((x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2)\varepsilon((x-1),(y-1),(z-1)).$$

8.1.8.4 Extrema locaux d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et signature de la hessienne

On suppose dans toute la suite que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, on s'attache à définir une technique simple pour savoir si un point critique de f est ou non un extremum local de f sur A.

Théorème 8.30. *conditions nécessaires du second ordre*

Si f admet un minimum local en un point a de A, nécessairement la hessienne de f en a est une forme quadratique positive.
(resp. maximum local alors la forme hessienne est négative)

démonstration en cours

Théorème 8.31. *conditions suffisantes du second ordre*

Soit a ***un point critique*** *de f qui n'est pas au bord de A.*

1. *Si la hessienne de f en a est définie positive alors f admet un minimum local sur A au point a .*

2. *Si la hessienne de f en a est définie négative alors f admet un maximum local sur A au point a .*

3. *Si la hessienne de f en a est ni positive ni négative alors f n'admet pas d'extremum local sur A au point a.*

démonstration en cours

Théorème 8.32. *Règle pratique extrema locaux et points critiques*
Critère pour savoir si un point critique a de f qui n'appartient pas à la fron-

tière de A est ou non un extremum local sur A de f :

signature hessienne en a	*nature hessienne en a*	*conclusion en a*
(n,0)	*définie positive*	*minimum relatif*
(0,n)	*définie négative*	*maximum relatif*
(p,q) 0<p et 0<q	*ni positive, ni négative*	*pas d'extremum local*
(p,0) p<n	*positive non définie*	*on ne peut conclure*
(0,q) q<n	*négative non définie*	*on ne peut conclure*

"on ne peut conclure" signifie que on ne peut pas conclure directement par cette méthode.

Rappel

Si Q_a est définie positive alors $(x \mapsto \sqrt{Q_a(x)})$ définit une norme.

Cas particulier d'une fonction de deux variables

La matrice hessienne est $\mathcal{H}_a = \begin{pmatrix} D_{11}f(a) & D_{12}f(a) \\ D_{21}f(a) & D_{22}f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ Le produit des valeurs propres est $rt - s^2$ leur somme $r + t$, d'où leur signe :

Si $rt - s^2 > 0$ maximum (resp.minimum) local en a si $(r+t) < 0$ (resp. > 0).

Si $rt - s^2 < 0$ f n'admet pas d'extremum local en a.

Si $rt - s^2 = 0$ Cette méthode ne permet pas de conclure.

Exemple 8.1.23.

Complétons l'étude de l'exemple (8.1.18) en s'appuyant sur les résultats de l'exemple (8.1.20) pour déterminer les extrémas locaux sur $\mathbb{R}^2$ de f définie par : $f(x, y) = xy(1 + x + y)$.

réponse : Les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$ sont :

$$a_0 = (0, 0), a_1 = (-1, 0), a_2 = (0, -1), a_3 = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}).$$

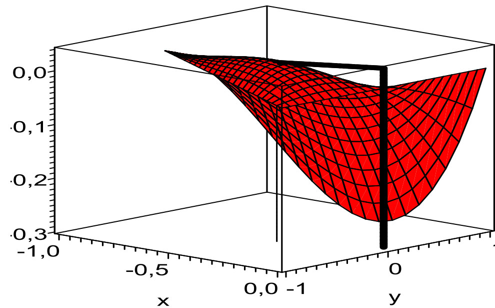
$$\mathcal{H}_f(a_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{H}_f(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \mathcal{H}_f(a_2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $a \in \{a_0, a_1, a_2\}$, le produit des valeurs propres de la matrice hessienne est -1, les valeurs propres sont de signes contraires et il n'y a pas d'extremum local.

$\mathcal{H}_f(a_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Le produit des valeurs propres $\frac{1}{3}$ est positif, elles sont de même signe, qui est celui de leur somme $-\frac{4}{3}$. La forme quadratique hessienne en a_3 est définie négative, f présente un maximum local en a_3.

Exemple 8.1.24.
Compléter l'étude de l'exemple (8.1.23) pour déterminer le maximum et le minimum de f sur le triangle A (bords compris) de sommets $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(0,1)$ avec f définie par : $f(x,y) = xy(1+x+y)$.

réponse :
f étant continue nous savons f admet un maximum absolu M et un minimum absolu m sur A. Soit M est atteint au bord de A, soit M est un maximum local sur A de f. De même pour m.
Etudions f sur la frontière de A :
Sur les bords $x = 0$ et $1 + x + y = 0$, f est nulle.
Sur le bord $1 + x - y = 0$ $f(x,y) = f(x, x+1) = 2x(x+1)^2$ et $x \mapsto 2x(x+1)^2$ varie entre 0 et $-\frac{8}{27}$ lorsque x décrit $[-1, 0]$.
L'étude précédente montre que f admet un seul maximum local sur A $M = f(a_3) = \frac{1}{27}$. Cette valeur est supérieure aux valeurs que prend f sur la frontière de A, le maximum de f sur A est donc $f(a_3) = \frac{1}{27}$
Selon l'étude précédente f n'admet pas de minimum local sur A, le minimum absolu de f sur A est atteint sur la frontière de A. L'étude aux bords montre que m est égal à $-\frac{8}{27}$.



Maple-représentation de la surface $(x, y, f(x,y))/(x,y) \in A$

8.2 EXERCICES

8.2.1 Différentielle- Matrice jacobienne

8.2.1.1 apprentissage du cours

Exercice 8.1.
Soit g définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ g(0,0) = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est différentiable en $a = (0,0)$ et que, en ce point, sa différentielle est l'application linéaire nulle.

Exercice 8.2.

1. Soit p_i l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à $x = (x_1, \cdots, x_n)$ associe x_i. Ecrire la matrice jacobienne de f au point $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$.
2. Soit $v = (v_1, \cdots, v_n)$ un vecteur donné non nul de $\mathbb{R}^n$ et p l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à $x = (x_1, \cdots, x_n)$ associe $(\, x \,|\, v \,)$. Déterminer la matrice jacobienne de p au point $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$.
3. Soit $v = (v_1, \cdots, v_n)$ un vecteur donné non nul de $\mathbb{R}^n$ et p_v la projection orthogonale sur $vect(v)$. Déterminer la matrice jacobienne de p_v au point $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$.
4. Soit $v = (v_1, \cdots, v_n)$ et $w = (w_1, \cdots, w_n)$ deux vecteurs donnés de $\mathbb{R}^n$ et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ qui au réel t associe le vecteur $f(t) = w + tv$. Déterminer la matrice jacobienne de f en a.
5. Soit $v = (v_1, \cdots, v_n)$ et $w = (w_1, \cdots, w_n)$ deux vecteurs donnés de $\mathbb{R}^n$ et g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ qui au réel t associe le vecteur $g(t) = w + (1-t^2)v$. Déterminer la matrice jacobienne de g en a.

Exercice 8.3.

1. Soit Q l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à $x = (x_1, \cdots, x_n)$ associe ${}^tXBX$ où B est une matrice carrée d'ordre n symétrique. Ecrire la matrice jacobienne de Q au point $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$.
2. Montrer que l'application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ $(x \mapsto f(x) = (\| \, x \, \|_2)^2)$ est différentiable en tout point a et exprimer $Df_{(a)}(h)$ en fonction de a et de h.

3. Montrer que la norme $N(x) = \|x\|_2$ est une application différentiable en tout point a distinct de $0_{\mathbb{R}^n}$ et exprimer $DN_{(a)}(h)$ en fonction de a et de h.

c Montrer qu'aucune norme sur $\mathbb{R}^n$ n'est différentiable en $0_{\mathbb{R}^n}$?

8.2.1.2 pour aller plus loin

8.2.2 Dérivée directionnelle- Dérivée partielle

8.2.2.1 apprentissage du cours

Exercice 8.4.
Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} (x,y) = (0,0) & f(0,0) = 0 \\ (x,y) \neq (0,0) & f(x,y) = \dfrac{x(x^2 - 3y^2)}{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

a Montrer que f admet une dérivée suivant la direction de tout vecteur $v = (\alpha, \beta)$ au point $(0,0)$ et calculer $D_v f(0,0)$ en fonction de α et de β.

b Calculer les dérivées suivant les directions des vecteurs e_1, e_2, $(e_1 + e_2)$ et en déduire en utilisant par un argument de non linéarité que f n'est pas différentiable au point $(0,0)$.

c Retrouver le résultat précédent à partir du calcul des dérivées suivant les directions des vecteurs e_1, e_2 en montrant que :
$(f(x,y) - f(0,0) - D_1 f(0,0)x - D_2 f(0,0)x)$ ne peut être écrit sous la forme $\| \ (x,y) \ \| \ \varepsilon(x,y)$ où $\varepsilon(x,y)$ tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers $0_{\mathbb{R}^2}$.

Exercice 8.5.
Calculer les dérivées partielles $D_1 f(a)$ et $D_2 f(a)$ en un point $a = (\alpha, \beta)$ de $\mathbb{R}^2$ de f :

$$\begin{cases} (x_1, x_2) \neq (0,0) & f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \\ (x_1, x_2) = (0,0) & f(0,0) = 0. \end{cases}$$

- lorsque $a = (0,0)$ en déterminant les applications partielles en $(0,0)$.
- lorsque $a \neq (0,0)$ en remarquant que sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ qui contient a l'application $f_{(j,a)}$ partielle est obtenue en ne faisant varier que la $j^{\text{ième}}$ variable dans l'expression de $f(x)$.

8.2.2.2 pour aller plus loin

Exercice 8.6.

a Etudier l'existence des dérivées partielles en $a = (1, 1)$ de l'application $f$de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x, y) associe $\max(x^2, y^2)$.

b On considère la surface (Σ) ensemble des points de coordonnées (x, y, z) tels que $z = f(x, y)$. Interpréter géométriquement les résultats obtenus en (a).

c f est-elle différentiable en a ?

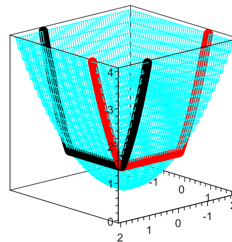


FIG. 8.1 – applications partielles non dérivables

Exercice 8.7.
Soit f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} (x,y) \neq (0,0) & f(x,y) = \dfrac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^4}} \\ (x,y) = (0,0) & f(0,0) = 0. \end{cases}$$

a Vérifier que $f$admet des dérivées dans la direction de n'importe quel vecteur en $(0, 0)$.

b Etudier les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2$.

c Vérifier que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 8.8.
Soit r un réel donné et f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ homogène de degré r, c'est à dire vérifiant la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^{+*} \qquad f(\lambda x) = \lambda^r f(x)$$

1. Vérifier que l'application f $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}}$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ est homogéne . .

2. u désigne désormais un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$ donné. Vérifier que si f est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, homogène de degré r, la dérivée de f dans la direction $(x \mapsto D_u f(x))$ est une application homogène de degré $r-1$.
3. Montrer que $D_u f(u) = r f(u)$.

8.2.3 Matrices jacobiennes et Règle de dérivation en chaîne

8.2.3.1 apprentissage du cours

Exercice 8.9.

a Matrice jacobienne de f_1 application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f_1(x,y) = (x^2 - y^2, y^3).$$

Calculer de trois manières la matrice jacobienne de $g_1 o f_1$ où g_1 est définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$(x,y) \mapsto x^3 + y^2.$$

b Matrice jacobienne de f_2 définie $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$f_2(x,y,z) = (\cos(xyz), x \exp z)$$

puis de g_2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$g(x,y) = ((\cos x + \sin y)\exp(xy), xy^2, \sin x).$$

et de la composée $g_2 o f_2$ en $(0,y,z)$.

8.2.3.2 pour aller un peu plus loin

Exercice 8.10.
Soit f une application différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer en fonction de $D_1 f$ et de $D_2 f$ la matrice jacobienne au point (x,y) de l'application g définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

a g(x,y) = f(y,x)
b g(x,y) = f(f(y,x),f(x,y))
c g(x,y) = f(f(y,x),f(x,f(x,y))).

Soit $f = (f_1, f_2, \cdots f_n)$ une application différentiable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$. Soit g une application différentiable de $\mathbb{R}^{(n+1)}$ dans $\mathbb{R}$.
Déterminer en fonction des dérivées f'_j et des dérivées partielles $D_j g$ la dérivée en x de l'application $x \mapsto g(x, f(x))$.

Exercice 8.11.
Soit φ une application différentiable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et f la fonction de deux variables définie par $f(x, y) = \varphi(\frac{y}{x})$.
Montrer que f est différentiable sur l'ouvert $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et est solution de l'équation différentielle aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

8.2.4 Accroissements finis

8.2.4.1 apprentissage du cours

Exercice 8.12.
Vérifier que l'application f : $((x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = \frac{x-y}{z})$ est définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$ qui contient $a = (\sqrt{3}, \sqrt{2}, \pi)$.
En se plaçant sur une boule de centre $a = (\sqrt{3}, \sqrt{2}, \pi)$ majorer chacune des dérivées partielles de f sur cette boule et montrer qu'il suffit de prendre des valeurs décimales approchées à quatre chiffres de $\sqrt{3}$, de$\sqrt{2}$ puis de π pour connaître $f(a)$ à 10^{-4} près. Est-ce que la seule définition de la différentiabilité en a permettrait d'établir ce résultat ?

Exercice 8.13.

1. Enoncer le théorème des accroissements finis permettant d'exprimer l'accroissement d'une fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ entre $a = (x_a, y_a, z_a)$ et $b = (x_b, y_b, z_b)$ en précisant les hypothèses qui doivent être vérifiées.
2. Appliquer ce théorème à $(x, y, z) \mapsto z^2 \arctan(\frac{y}{x})$ sur[1] $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, entre $(1, 0, 0)$ et $(1 + \Delta x, \Delta y, -\Delta z)$ puis majorer cet accroissement lorsque $0 < \Delta x < 10^{-2}$, $0 < \Delta y < 2 \cdot 10^{-2}$ et $0 < \Delta z < 10^{-2}$.

[1] Vous devez savoir $(\arctan t)' = \dfrac{1}{1+t^2}$

8.2.4.2 pour aller un peu plus loin

Exercice 8.14.
On se propose de montrer que le système suivant admet une solution (α, β) et une seule dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x+y) = x \\ \frac{1}{2}\cos(x-y) = y. \end{cases}$$

On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x,y) = (\frac{1}{2}\sin(x+y), \frac{1}{2}\cos(x-y))$$

- Calculer la matrice jacobienne de f.
- Trouvez une norme classique $\| \quad \|$ sur $\mathbb{R}^2$ qui permette de montrer que f est contractante dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme précédemment choisie.
- Combien d'itérations sont-elles nécessaires à partir de la valeur $(0, 0)$ pour obtenir une valeur approchée de α et de β à 10^{-2} près ?

Exercice 8.15.
Soit F une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie sur une ouvert U qui contient $a = (x_a, y_a, z_a)$ et $b = (x_b, y_b, z_b)$ et l'application linéaire p de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui associe à un vecteur v de $\mathbb{R}^2$ le produit scalaire $(\, v \mid F(b) - F(a)\,)$. On se donne enfin l'application φ :

$$t \in [0,1] \mapsto \varphi(t) = a + t(b-a) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Que vaut la dérivée $(poFo\varphi)'(t)$.
2. En déduire qu'il existe un élement c de $[a, b]$ tel que

$$\|F(b) - F(a)\|_2^2 = \big(\, DF_{(c)}(b-a) \mid F(b) - F(a)\,\big)$$

   où $DF_{(c)}$ désigne la différentielle de F en c.
3. A partir de l'égalité précédente retrouvez la majoration de la norme euclidienne $\|F(b) - F(a)\|_2$ donnée par le théorème de l'inégalité des accroissements finis.

8.2.5 Applications de classe $\mathcal{C}^1$

8.2.5.1 apprentissage du cours

Exercice 8.16.
Montrer que l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$(x,y) \mapsto (x^2+y^2)sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) \text{ si } (x,y) \neq (0,0)$$
$$(0,0) \mapsto 0.$$

est différentiable en $(0,0)$ sans être de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$.

Exercice 8.17.
Déterminer l'application f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ qui est solution de l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = 3t^2x$ et vérifie la condition initiale $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(0,x) = sinx$.
Déterminer l'application f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ qui est solution de l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = 3t^2xf(t,x)$ et vérifie la condition initiale $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(0,x) = sinx$.

Exercice 8.18. "introduction au changement de variable"
Soit φ $(x,y) \mapsto (x, x+ky)$ où k est un réel non nul.

1. Montrer que φ est bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Vérifier que φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.

On se donne une application f de $U = \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et une relation liant f à ses dérivées partielles :

$$k\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(0,y) = 1. \qquad (8.16)$$

On se propose de substituer à cette relation difficile à étudier une relation plus simple[1] portant sur une application F déduite de f par le changement de variable "φ", c'est à dire par la composition d'applications :

$$Fo\varphi = f \qquad (x,y) \mapsto \varphi(x,y) = (u,v) \mapsto F(u,v) = f(x,y)$$

[1]un calcul de primitive ou une équation différentielle ordinaire comme dans l'exercice précédent

En général on vous donnera φ.[1] choisie de sorte que la relation sur F soit résolvable, on calcule alors F, puis on en déduit f.

1. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ il en est de même de $F = f o \varphi^{-1}$ et que inversement si F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, il en est de même de $f = F o \varphi$.
2. Exprimer les dérivées partielles d'ordre 1 de f en fonction de celles de F.
3. Vérifier que f est solution de (8.16) si et seulement si F vérifie :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = 0 \quad \text{et} \quad \forall v \in \mathbb{R} \quad F(0,v) = \sin\frac{v}{k}.$$

4. En déduire F.
5. Calculer f

Réponse

Avec les matrices jacobiennes :

$$\begin{pmatrix} D_1 f(x,y) & D_2 F(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 F(u,v) & D_2 F(u,v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

$$D_1 f(x,y) = D_1 F(u,v) + D_2 F(u,v) \qquad D_2 f(x,y) = k D_2 F(u,v)$$

[1] Il existe, pour certains types de problème, des méthodes permettant de déterminer φ mais vous verrez cela plus tard

Autre présentation avec la règle de dérivation en chaîne :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \qquad k\dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v), \end{cases}$$

Il vient dans tous les cas :

$$k\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = k\frac{\partial F}{\partial u}(u,v).$$

De plus

$$(0, \frac{v}{k}) = \varphi^{-1}(0,v)$$

$$f(0,y) = \sin y \Leftrightarrow F(0,v) = f(\varphi^{-1}(0,v)) = \sin\frac{v}{k}.$$

Exercice 8.19. [1]

En dimension 1 la loi de conservation de la masse pour un fluide de densité $\rho(x,t)$ ($t =$ temps, x est la position) et de flux $q(x,t)$ s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

On suppose que $q(x,t) = \dfrac{\lambda}{\ell+1}\rho^{\ell+1} + \mu\dfrac{\partial \rho}{\partial x}$
avec λ, ℓ, μ des constantes positives données.

1. Vérifier que ρ est solution de l'équation aux dérivées partielles (EDP)
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \lambda\rho^{\ell}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0 \qquad (8.17)$$

2. On considère dans cette question le cas $\mu = 0, \ell = 0$ et $\lambda > 0$. L'équation (8.17) devient
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \lambda\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \qquad (8.18)$$
Trouver des valeurs de a et de b qui permettent de résoudre (8.18) à l'aide d'un changement de variables linéaire de la forme $\begin{cases} u = t + a\,x \\ v = t + b\,x \end{cases}$
Résoudre (8.18) et vérifier le résultat que vous obtenez.

[1] sujet deuxième année 2007

3. On considère dans cette question le cas $\mu = 0, \ell = \lambda = 1$. L'équation (8.17) devient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \tag{8.19}$$

Exercice 8.20.

1. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U$=\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$. Pourquoi définit-on une application F de classe $\mathcal{C}^1$ sur U en écrivant $f = Fo\varphi$ où $\varphi(x,y) = (\frac{y}{x}, y)$. ?
2. Quelle propriété de φ permet d'affirmer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement f l'est ?
3. Que devient la relation $xD_1 f + yD_2 f = f$ en fonction de F ?

8.2.5.2 pour aller plus loin

Exercice 8.21.

1. Montrer que l'application φ $(u,v) \mapsto (\frac{u}{v}, uv^2)$ définit un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ sur U.
2. Déterminer la matrice jacobienne de φ et celle de φ^{-1}.
3. Montrer que f est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$2y\frac{\partial f}{\partial y} - x\frac{\partial f}{\partial x} = f(x,y) \tag{8.20}$$

   si et seulement si $h = fo\varphi$ est solution d'une équation différentielle linéaire.
4. Montrer qu'il existe une unique solution f de (8.20) satisfaisant la condition $f(x,x) = 1$.

Exercice 8.22.

On cherche toutes les solutions f de classe C^1 sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ qui satisfont l'égalité

$$(E) \qquad f(x,y) \cdot \left(x\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = (x^2 + y^2)$$

1. Montrer que la fonction $\varphi : (x,y) \to (y/x, x^2+y^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ sur $V = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ bijective et que sa différentielle en chaque point de U est bijective(on sait que alors φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.
2. On effectue le changement de variable $f(x,y) = g(\varphi(x,y))$. En utilisant la méthode explicitée dans l'exercice précédent exprimer les dérivées partielles de premier ordre de f en terme de dérivées partielles de premier ordre de g.
3. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g vérifie :

$$2g(u,v)\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 1, \quad u = y/x, \quad v = x^2+y^2$$

4. Quel est l'ensemble des applications f de classe C^1 qui satisfont l'équation (E) ?

8.2.5.3 pour aller beaucoup plus loin

Exercice 8.23. [1]
L'équation de Kepler $v - \varepsilon sinv = t$ exprime une relation entre le temps t (pour un choix convenable de l'origine et de l'unité de temps), l'anomalie excentrique, v[2], et l'excentricité[3] de l'ellipse, trajectoire de la planète, qui est :

1. Montrer que t et ε étant des paramétres fixés dans $\mathbb{R}\times]-1,1[$, cette équation a une solution et une seule en v.
2. On écrit donc lorsque t et ε varient dans $\mathbb{R}\times]-1,1[$ $v = \varphi(t,\varepsilon)$. Montrer que $v - t$ est périodique par rapport à la variable t.

3. Le théorème des fonctions implicites permettra sans aucun calcul d'affirmer que φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. En admettant ce résultat, écrire l'égalité des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 qui découle de l'égalité fonctionnelle :

$$\forall (t,\varepsilon) \in \mathbb{R}\times]-1,1[\quad \varphi(t,\varepsilon) - \varepsilon sin(\varphi(t,\varepsilon)) = t$$

déterminer les dérivées partielles $D_2\varphi$ et $D_{22}\varphi$.

[1] Issu d'un exercice proposé par François Rouvière -Calcul Différentiel Cassini

[2] la trajectoire d'une planète étant donnée sous la forme $x = a\cos v$ et $y = b\sin v$, $0 \le b \le a$

[3] $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

Exercice 8.24.
Vous pourrez comparer cet exercice à l'exemple de référence (8.9) sur le passage en coordonnées sphériques.

1. Soit Φ l'application de l'ouvert $U =]0, +\infty[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times] - \pi, \pi[$ dans l'ouvert $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z)/x \leq 0 \,\text{et}\, z \in \mathbb{R}\}$ définie par :
$$(r, \varphi, \lambda) \mapsto (x = r\cos\varphi\cos\lambda, y = r\cos\varphi\sin\lambda, z = r\sin\varphi). \qquad (8.21)$$
   (a) Vérifier que si $r, \varphi, \lambda, x, y$ et z vérifient (8.21) alors nécessairement
$$\varphi = \arcsin\left(\frac{z}{r}\right). \qquad \lambda = 2\arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$
   on dit que φ est la latitude et λ la longitude de (x, y, z).
   (b) Montrer que Φ est bijective de classe $\mathcal{C}^1$.
   (c) Vérifier que la différentielle de Φ en tout point de U est bijective, en déduire que Φ réalise un difféomorphisme de U sur V.

2. *Dérivation d'applications composées.* Pour une latitude φ, et une longitude λ données, $\Phi(1, \varphi, \lambda)$ a pour norme euclidienne 1, et définit un point de la sphère unité. Nous appliquons à ce point la projection "stéréographique-sud" définissant ainsi une application h[1] :
$$(\varphi, \lambda) \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times] - \pi, \pi[\mapsto (x = \frac{\cos\varphi\cos\lambda}{1 + \sin\varphi}, y = \frac{\cos\varphi\sin\lambda}{1 + \sin\varphi})$$
   (a) Faire un dessin en plaçant sur la sphère unité le point de latitude[2] $\frac{\pi}{6}$ et de longitude $\frac{\pi}{4}$, et sa projection "stéréographique-sud".
   (b) Ecrire la matrice jacobienne de h en (φ, λ).
   (c) Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, exprimer les dérivées partielles d'ordre 1 de foh en fonction des dérivées partielles d'ordre 1 de f.
   (d) Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie $\partial_{11}f + \partial_{22}f = 0$, exprimer $\partial_{11}(foh)(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ en fonction des dérivées partielles de f en un point (x_0, y_0) que vous définirez.

[1] La projection "stéréographique pôle sud" est définie dans l'espace affine euclidien associé à l'espace vectoriel euclidien de dimension 3 à partir de $P = (0, 0, -1)$ et associe à tout point M de la sphère unité de coordonnées (x_1, y_1, z_1), distinct de P, le point du "plan équatorial" intersection de la droite (MP) et du plan $z = 0$. Ce point a donc pour coordonnées $(x = \frac{x_1}{1 + z_1}, y = \frac{y_1}{1 + z_1}, z = 0)$

[2] Que vaut z ?

8.2.5.4 pour en savoir plus

Exercice 8.25.
En utilisant la définition du gradient donnée en (8.20), déterminer le gradient en $a = (a_1, a_2, ..a_n)$ de l'application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = exp(- \parallel x \parallel_2^2)$.

Exercice 8.26.

Vous utiliserez les définitions de "champ dérivant d'un potentiel" donnée en (8.20), de la "divergence d'un champ de vecteurs" donnée en (8.19) et du rotationnel d'un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnée en (8.22).

1. Soit $\overrightarrow{F}$ le champ de vitesses d'un solide en rotation autour de l'axe des z, $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (-\omega y, \omega x, 0)$. Vérifier que le rotationnel de $\overrightarrow{F}$ est constant.
2. Montrer que si un champ de vecteur $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel scalaire $\overrightarrow{F}$ de classe $\mathcal{C}^2$ alors son rotationnel est nul : $rot(\overrightarrow{grad\, f}) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
3. Si un champ de vecteur $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel vecteur c'est à dire s'il existe un champ de vecteurs $\overrightarrow{G}$ tel que $\overrightarrow{F} = rot(\overrightarrow{G})$, alors sa divergence est nulle : $div(rot(\overrightarrow{G})) = 0_{\mathbb{R}}$.[1].
4. Soit un champ de vecteurs $\overrightarrow{F}$ et $g = div\overrightarrow{F}$. Exprimer le gradient de g en fonction de $rot(rot(\overrightarrow{F}))$ et de ΔF.

[1] Les réciproques sont vraies sur un ouvert convexe ou même étoilé suffit

8.2.6 Applications de classe $\mathcal{C}^2$

8.2.6.1 pour apprendre le cours

Exercice 8.27.
Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Vérifier que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8.28.

1. Vérifier que l'application f de l'ouvert $U = \mathbb{R}\times]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}^2$ (n=p=2) définie par : $f(x,y) = (xy, \frac{x}{y})$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, écrire sa matrice jacobienne.
2. Soit g est une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, déterminer la matrice jacobienne de $h = gof$ en fonction des dérivée partielles d'ordre un de g.
3. Vérifier que h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et exprimer les dérivées partielles d'ordre 2 de h en fonction des dérivées partielles de g.
4. Déterminer h lorsque $g(x,y) = xy$, que valent les dérivées partielles de g ? quelle est la matrice hessienne de h ? Vérifier que les résultats obtenus dans cette question et dans la question précédente sont compatibles.

Exercice 8.29.
Reprendre l'exercice du cours (8.1.16) où il s'agit de déterminer l'application f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ sachant que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -xy$$

avec les conditions par $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0) = x \quad \text{et} \quad f(x,2x) = 1$.

Exercice 8.30.
Quelles sont les applications f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$, qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in U \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0,$$

On pourra prendre pour fonction inconnue $g = \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Exercice 8.31.
Soient f et g deux applications deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et c une constante non nulle, montrer que l'application u définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

est deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et solution de l'équation des ondes :

$$D_{22}u(x,t) - c^2 D_{11}u(x,t) = 0$$

8.2.6.2 pour aller plus loin

Exercice 8.32.

1. Existe-t-il des applications f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $D_1 f(x,y) = x^2$ et $D_2 f(x,y) = xy$?
2. Le champ de vecteurs $(x,y) \mapsto (e^{xy}, e^{x+y})$ dérive-t-il d'un potentiel (c'est à dire existe-t-il une application différentiable u de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f = \nabla u$) ?

Exercice 8.33. `Expression du laplacien en polaire`

1. Vérifier que l'application f de l'ouvert $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ (n=p=2) définie par : $f(r,\theta) = (rcos(\theta), rsin(\theta))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et a pour matrice jacobienne :

$$J_f(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

2. Soit g est une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, déterminer la matrice jacobienne de $h = gof$ en fonction des dérivée partielles de g.
3. Appliquer ces relations pour exprimer les dérivées partielles de $D_{11}h$ et de $D_{22}h$ et $D_{12}h$ en fonction des composées des dérivées partielles secondes et premières de g : $D_{11}g$, $D_{22}g$ $D_{12}g$, $D_1 g$ et $D_2 g$ et de l'application f.
4. En déduire l'expression de $(D_{11}g + D_{22}g)(rcos\theta, rsin\theta)$ en fonction de $D_{11}h(r,\theta)$, $\frac{1}{r^2}D_{22}h(r,\theta)$ et $\frac{1}{r}D_1 h(r,\theta)$.
5. Vérifier

$$D_{11}(gof)(r,\theta) = (D_{11}g)of(r,\theta)\cos^2\theta + 2(D_{12}g)of(r,\theta)\sin\theta\cos\theta \quad +$$

$$(D_{22}g)of(r,\theta)\sin^2\theta.$$

$$D_{22}(gof)(r,\theta) = (D_{11}g)of(r,\theta)r^2\sin^2\theta - 2(D_{12}g)of(r,\theta)r^2\sin\theta\cos\theta \quad + \\ (D_{22}g)of(r,\theta)r^2\cos^2\theta - (D_1g)of(r,\theta)rcos\theta - (D_2g)of(r,\theta)rsin\theta.$$

6. Calculer $D_{12}(gof)(r,\theta)$.
7. L'opérateur de dérivation d'ordre 2 appelé laplacien, introduit en (8.21), peut être défini[1] par

$$g \mapsto \Delta g \quad \Delta g(x,y) = (D_{11}g + D_{22}g)(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)$$

Vérifier :

$$(\Delta g)of = D_{11}(h) + \frac{1}{r^2}D_{22}(h) + \frac{1}{r}D_1(h).$$

En notant $h(r,\theta) = g(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ on obtient :

$$\Delta g(x,y) = D_{11}(h)(r,\theta) + \frac{1}{r^2}D_{22}(h)(r,\theta) + \frac{1}{r}D_1(h)(r,\theta).$$

Cette dernière écriture est appelée "l'expression du laplacien en polaire".

Exercice 8.34.

On se propose de déterminer les applications de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, f, telles que en tout point a de $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $D_1f(a)$ et $D_2f(a)$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

Rappelons tout d'abord les propriétés du produit scalaire. Soient U et V deux applications différentiables de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et T leur produit scalaire :

$$a \in \mathbb{R}^2 \mapsto T(a) = (\, U(a) \,|\, V(a) \,).$$

1. Que vaut $DT_{(a)}(h)$ en fonction de $DU_{(a)}(h)$ et de $DV_{(a)}(h)$?
2. En déduire que les dérivées partielles de T sont données par :

$$\begin{cases} D_1T(a) = (\, D_1U(a) \,|\, V(a) \,) + (\, U(a) \,|\, D_1V(a) \,) \\ D_2T(a) = (\, D_2U(a) \,|\, V(a) \,) + \big(\, U(a) \,|\, D_2V_(a) \,\big) \end{cases} \tag{8.22}$$

[1]comme nous le vérifierons dans l'exercice (8.49)

3. Revenant à l'étude de f, déterminer $(D_{12}f(a) \mid D_1 f(a))$ puis $(D_{12}f(a) \mid D_2 f(a))$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $D_{12}f(a)$ dans la base $(D_1 f(a), D_2 f(a))$?
4. Quelles sont les coordonnées de $D_{11}f(a)$ et de $D_{22}f(a)$ dans la base $(D_1 f(a), D_2 f(a))$?
5. Montrer que la matrice jacobienne de f en a est une matrice de rotation indépendante de a. Que pouvez-vous dire de l'application f ?

8.2.6.3 pour en savoir plus

Exercice 8.35. Soit f une fonction de E dans F définie, deux fois différentiable sur un ouvert U de E et g une fonction de F dans G définie, deux fois différentiable sur un ouvert V de F tel que $f(U) \subset V$.

1. Dans le cas E = F = $\mathbb{R}$, calculer $(gof)''(x)$ en fonction de $g''(f(x))$ et de $f''(x)$.
2. Dans le cas général, montrer que pour tout x dans U, pour tout k et h dans E :

$$D^2(gof)(k)(h) = D^2g(Df(a)(k))(Df(a)(h)) + Dg(D^2f(a)(k)(h))$$

Exercice 8.36. Une application qui ne vérifie pas le théorème de Schwarz
Cet exemple de calcul de dérivées partielles de second ordre est donné par Peano (1858-1939) dans son *Calcolo differenziale e principi di calcolo integrale*
U= $\mathbb{R}^2$ et f définie par :

$$\begin{cases} (x,y) \mapsto f(x,y) = \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Existence et calcul de $D_2(D_1 f)$ et de $D_1(D_2 f)$ sur $\mathbb{R}^2$.
Vérifier que $D_2(D_1 f)(0,0) \neq D_2(D_1 f)(0,0)$.

8.2.7 Difféomorphisme

8.2.7.1 pour apprendre le cours

Exercice 8.37.

1. Soient U=$\mathbb{R}$, V=$\mathbb{R}$, l'application sinus hyperbolique définit-elle un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de U sur V ?

2. Soient U=$\mathbb{R}$, V=$\mathbb{R}$, l'application f $x \mapsto x^3$ définit-elle un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V ?

3. Soient U=$\mathbb{R}^2$, V=$\mathbb{R}^2$, vérifier que f où $f(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de U sur V si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Exercice 8.38.
Soit f l'application de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

1. Montrer que la différentielle de f est bijective en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Déterminer un ouvert maximal U contenant le point $(1,1)$ tel que f définisse un difféomorphisme de U sur $f(\mathrm{U})$.

Exercice 8.39. *Difféomorphisme et conditions aux limites*
On considère une corde de longueur infinie qui vibre dans un plan vertical et dont le déplacement vertical $u(x,t)$ est solution de l'équation.

$$D^2_{11}u(x,t) - \frac{1}{c^2}D^2_{22}u(x,t) = 0$$

où c est une constante non nulle. La corde est supposée immobile au temps $t = 0$ et occupant la position $u(x,0) = \sin x$.

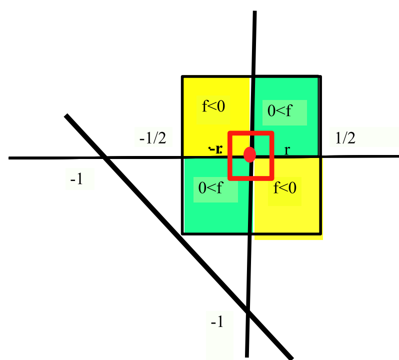
1. Montrer que l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :
$(x,t) \mapsto f(x,t) = (x+ct, x-ct)$ est un $\mathcal{C}^2$ -difféomorphisme.
2. En déduire que l'égalité $u = hof$ définit une unique application sur $\mathbb{R}^2$.
3. Vérifier que h est de classe $\mathcal{C}^2$, si et seulement si u l'est.
4. Exprimer $D^2_{11}u(x,t) - \dfrac{1}{c^2}D^2_{22}u(x,t)$ en fonction des dérivées partielles de h.
5. Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} D^2_{11}u(x,t) - \dfrac{1}{c^2}D^2_{22}u(x,t) = 0 \\ u(0,x) = \sin x \\ D_1u(x,0) = 0. \end{cases}$$

8.2.8 Extrema d'une fonction de plusieurs variables

8.2.8.1 apprentissage du cours

Exercice 8.40.
Soient f et g définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xy(1+x+y)$ et $g(x,y) = x^2(1+x+y)$. Vérifier que $a = (0,0)$ est un minimum local de g et n'est pas un extremum local de f.



correction : En effet toute boule B pour la norme $\| \|_\infty$ de centre a et de rayon r, $r < \frac{1}{2}$ est incluse dans le demi-plan $0 < 1 + x + y$ puisque

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} < x + y.$$

d'où $0 < 1 + x + y$ et $f(x,y)$ a le signe de xy.

$$\begin{cases} 0 < x < r \\ 0 < y < r \end{cases} \Rightarrow 0 < f(x,y),$$

$$\begin{cases} 0 < x < r \\ -r < y < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x,y) < 0.$$

Donc $f(a) = 0$ n'est ni un maximum, ni un minimum sur B aussi petit que soit r, f n'admet donc pas d'extremum local en ce point.
$g(x,y)$ a le signe de x^2 sur B donc est positif ou nul, or $g(a) = 0$; g admet un minimum local en a.

Exercice 8.41. Donner le polynôme de Taylor à l'ordre 2 de chacune des applications suivantes

1.$f(x,y,z) = x^2e^y + y^2e^z + z^2e^x$ à l'ordre2 en $(0,0,0)$ puis en $(2,2,2)$.

2. $f(x,y,z) = x\cos y + y\sin z$ en $(0,0,0)$.

3. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$ en $(1,1,1)$.

En déduire le développement de f suivant les puissance de $(x-1)$, $(y-1)$, $(z-1)$.

Exercice 8.42.
Soit $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^3}$. Ecrire le polynôme de Taylor de f à l'ordre 2 en $(1,2)$ et en déduire une valeur approchée de $\sqrt{(1.02)^2 + (1.97)^3}$

Exercice 8.43.
1. Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 2 appliquée à $f(x,y) = \sin(xy)$ en $(0,0)$.
2. Retrouver sans aucun calcul le résultat précédent en écrivant un développement limité de l'application sinus en 0.

Exercice 8.44.

1. Déterminer les extrema locaux sur $\mathbb{R}^n$ de f définie par :

$$n = 2 \qquad f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^2) + 4xy$$

$$n = 2 \qquad f(x,y) = (y-x)^2(1 - x^2 - y^2)$$

2. (a) Déterminer les points critiques de f définie par :

$$n = 3 \qquad f(x,y,z) = x^2e^y + y^2e^z + z^2e^x$$

en remarquant que si $a = (x_0, y_0, z_0)$ est point critique, (e^x, e^y, e^z) est solution non triviale d'un système linéaire homogène, montrer que nécessairement $x_0y_0z_0 = -8$. Puis vérifier que nécessairement $x_0 \leq 0$, $y_0 \leq 0$, $y_0 \leq 0$. Remarquer que alors (y_0, z_0, x_0) et (z_0, x_0, y_0) sont aussi des points critiques, et que l'on peut supposer $x_0 = max(x_0, y_0, z_0)$ et en déduire $z_0^2 \leq -2x_0 \leq -2z_0$, puis $-2 \leq z_0 \leq x_0 \leq 0$. Vérifier que $-2 \leq y_0 \leq x_0 \leq 0$. Montrer $(x_0, y_0, z_0) \in \{(-2,-2,-2), (0,0,0)\}$.

   (b) Déterminer les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^n$.

3. Soit f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$(x,y) \longrightarrow 3x^4 - 4x^2y + y^2 = (y - 3x^2)(y - x^2)$$

Montrer que f admet un maximum relatif sur toute droite passant par $(0,0)$ mais n'admet pas d'extremum relatif en $(0,0)$.

Exercice 8.45.
On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy^2 + x$.

1. Pourquoi f admet-elle un maximum sur le carré $[-1,1] \times [-1,1]$?
2. Pourquoi f ce maximum n'est-il pas atteint sur le carré ouvert $]-1,1[\times]-1,1[$?

3. Etudier la restriction de fà chacun des côtés du carré et déterminer le maximum de f.

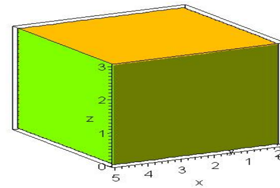
Exercice 8.46.
Rechercher le maximum et le minimum de f sur D où D $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \mid x \mid \leq 1 \quad \mid y \mid \leq 1\}$ de f définie par $f(x,y) = xy - y^2$.

Exercice 8.47.

On étudie la fonction qui à un pavé de volume donné V associe la surface latérale de ce pavé.
question préliminaire : Vérifier que la surface d'un pavé de $\mathbb{R}^3$ de volume V fixé dépend de deux longueurs que l'on notera x et z et est donnée par la formule :

$$(x,z) \in U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$$

$$S(x,z) = 2(xz + \frac{V}{x} + \frac{V}{z}).$$



1. Valeurs approchées au voisinage de $a = (1,1)$[1].
   (a) Ecrire la définition de la différentiabilité de S en a pour évaluer $S(a+h) - S(a)$ avec $h = (\Delta x, \Delta z)$ et donner une valeur approchée à l'ordre 1 de $S(1,002, 0,999)$.
   (b) Donner de même une valeur approchée à l'ordre 2 de $S(1,002, 0,999)$ en écrivant la formule de Taylor Young à l'ordre 2.
2. Etude d'extrema locaux.
   (a) Montrer que S admet un seul point critique $c = (\alpha, \alpha)$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$
   (b) Montrer que S atteint un minimum local $m = S(c)$ en c.
3. Etude d'extrema globaux.
   (a) Vérifier que l'on peut choisir des réels strictement positifs r et R pour que S soit supérieure à $2m$ sur $A =]0,r] \times \mathbb{R}^{+*} \cup \mathbb{R}^{+*} \times]0,r]$ et sur $B = [R, +\infty[\times \mathbb{R}^{+*} \cup \mathbb{R}^{+*} \times [R, +\infty[$, Pourquoi peut-on assurer que S admet un minimum global sur $C = [r,R] \times [r,R]$.
   (b) Représenter A, B, C et U. Pourquoi peut-on assurer que m est le minimum global de S sur U ?

[1]en fonction de la constante V

8.2.8.2 pour aller beaucoup plus loin

Exercice 8.48.
La notion de convexité est une notion essentielle en optimisation. Vous savez tous que la courbe représentative d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable et convexe est située au-dessus de la tangente en un point quelconque. C'est ce point de vue, généralisé à $\mathbb{R}^2$, que nous utilisons ici.
Une application f de classe[1] $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$ si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \quad f(y) - f(x) \geq Df(x)(y-x)$$

où $Df(x)(y-x)$ désigne l'image du vecteur $(y-x)$ par la différentielle de f en x.

1. Vérifier que l'application $x = (x_1, x_2) \mapsto {x_1}^2 + {x_2}^2$ est convexe.
2. Montrer que si a est un extremum local d'une application f de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe sur $\mathbb{R}^2$ alors f est minorée sur $\mathbb{R}^2$ et admet pour minimum absolu sur $\mathbb{R}^2$, $f(a)$.

On se propose de montrer que, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe sur $\mathbb{R}^2$, alors la hessienne de f en tout point de $\mathbb{R}^2$ est une forme quadratique positive en raisonnant par l'absurde.

3 . Montrer, en écrivant une formule de Taylor à l'ordre 2, que, s'il existe un point x de $\mathbb{R}^2$ et un vecteur v de $\mathbb{R}^2$ tel la hessienne de f en x prenne en v une valeur strictement négative, alors f n'est pas convexe.

Exercice 8.49. Vous utiliserez la définition du laplacien ou opérateur différentiel de Laplace donnée en (8.21).

1. Vérifier que cet opérateur est linéaire et que :

$$\Delta h(x) = \sum_{i=1}^{i=n} D_{ii} h(x)$$

2. Calculer $\Delta(\| x \|_2^2)$
   Une application h de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite harmonique sur U si : $\forall$x$\in$U Δh (x)= 0.

d Vérifier que si n=2 l'application $v \mapsto \ln(\| v \|_2)$ est harmonique sur l'ouvert U=$\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

[1]Il suffit, ainsi que dans la deuxième question de cet exercice, de supposer f différentiable.

3. Exprimer $\Delta(fg)$ en fonction de Δf et de Δg, ∇f et ∇g. A quelle condition le produit de deux applications harmoniques est-il une application harmonique ?
4. Montrer que si h admet un maximum relatif en un point a de U alors $\Delta h(a) \leq 0$.
5. En déduire que le maximum sur la boule unité fermée $\overline{B}$ d'une fonction continue sur $\overline{B}$, de laplacien strictement positif sur la boule ouverte B est atteint en un point de la sphère.
6. Vérifier que si h est nulle sur la sphère unité et de laplacien strictement positif sur B alors h est négative ou nulle sur B.
7. Montrer que si h est nulle sur la sphère unité et harmonique sur B le résultat est encore vrai. On pourra appliquer le résultat de la question précédente à $h + \eta(\| x \|_2^2 - 1)$ et faire tendre η vers 0.

8.2.9 Inversion locale - fonctions implicites

8.2.9.1 pour apprendre le cours

Exercice 8.50.

1. Soient U=$\mathbb{R}$, V=$\mathbb{R}$, l'application sinus hyperbolique définit-elle un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de U sur V ?
2. Soient U=$\mathbb{R}$, V=$\mathbb{R}$, l'application f $x \mapsto x^3$ définit-elle un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V ?

3. Soient U=$\mathbb{R}^2$, V=$\mathbb{R}^2$, vérifier que f où $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de U sur V si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Exercice 8.51.
Soit f l'application de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

1. Montrer que f définit localement un difféomorphisme au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.
2. Déterminer un ouvert maximal U contenant le point $(1, 1)$ tel que f définisse un difféomorphisme de U sur f(U).

Exercice 8.52.
Donner une condition suffisante sur (x_0, y_0, z_0) pour que les relations $u = x + y^2$, $v = y + z^2$ et $w = z + x^2$ définissent localement (sur un ouvert contenant (x_0, y_0, z_0)) x, y et z comme fonctions de u, v et w.

Exercice 8.53.

1. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U=$\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$. Pourquoi définit-on une application F de classe $\mathcal{C}^1$ sur U en écrivant $f = Fo\varphi$ où $\varphi(x, y) = (\frac{y}{x}, y).$?
2. Quelle propriété de φ permet d'affirmer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement f l'est ?
3. Que devient la relation $xD_1f + yD_2f = f$ en fonction de F ?

Exercice 8.54.

1. Montrer que l'équation $sin(x + y) = xy + 2x$ a dans un voisinage de $(0, 0)$ une solution de la forme $(x, y = \varphi(x))$.

2. Donner un développement limité à l'ordre 2 de φ en 0.
3. Au voisinage de $(0,0)$, la relation implicite $sin(x+y) = xy+2x$ définit une courbe. Précisez la tangente à cette courbe en ce point et la position de la courbe par rapport à sa tangente.

Exercice 8.55.

1. Montrer que la relation $(x^2+y^2+z^2)Ln(x+y+z) - e^{x+y} = -1$ définit z comme fonction implicite de (x,y) au voisinage de $(0,0,1)$.

2. Notant $(x,y) \in V \mapsto z = \varphi(x,y)$, trouver les dérivées partielles de l'application φ en (x,y) élément quelconque de V puis en $(0,0)$.

Exercice 8.56.
On considère le système d'équations d'inconnues (x,y,z,t) $\in \mathbb{R}^4$ suivant :

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + t = 2$$
$$x + y + z + t = 0$$

1. Vérifier que le point $(0,-1,1,0)$ est solution.
2. Montrer que l'on peut résoudre ce système par rapport à (x,y,z) au voisinage de ce point.
3. Calculer la dérivée en 0 de l'application $(t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ ainsi définie.

Exercice 8.57. *equations implicites d'une courbe*
Soit f de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par ses composantes f_1 et f_2 :

$$f_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$$
$$f_2(x,y,z) = x^2 + 3xy - 2y$$

1. Montrer que l'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage du point (1,-1,1).

2. Exprimer au voisinage de ce point (y,z) sous la forme $(y,z) = \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$. Quel résultat donne ici le théorème des fonctions implicites et qui n'est pas obtenu en appliquant seulement le théorème général sur la tangente à une courbe tracée sur une surface ?

8.2.9.2 pour aller plus loin

Exercice 8.58. [1]
L'équation de Kepler $v - \varepsilon sinv = t$ exprime une relation entre le temps t (pour un choix convenable de l'origine et de l'unité de temps), l'anomalie excentrique, v[2], et l'excentricité[3] de l'ellipse, trajectoire de la planète, qui est :

1. Montrer que t et ε étant des paramétres fixés dans $\mathbb{R}\times]-1,1[$, cette équation a une solution et une seule en v.
2. On écrit donc lorsque t et ε varient dans $\mathbb{R}\times]-1,1[$ $v = \varphi(t,\varepsilon)$. Montrer que $v - t$ est périodique par rapport à la variable t.

3. Le théorème des fonctions implicites permettra sans aucun calcul d'affirmer que φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Ecrire $\forall t\varepsilon \in \mathbb{R}\times]-1,1[\quad \varphi(t,\varepsilon) - \varepsilon sin(\varphi(t,\varepsilon)) = t$. En écrivant l'égalité des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2, déterminer les dérivées partielles $D_2\varphi$ et $D_{22}\varphi$.

Exercice 8.59. La pression, p, le volume, v, et la température, t, d'un gaz donné vérifient une équation, appelée équation d'état, de la forme :

$$f(p,v,t) = 0$$

où, pour simplifier, nous supposerons[4] que f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+3}$ dont aucune dérivée partielle ne s'annule sur $\mathbb{R}^{*+3}$.

1. Soit $m_0 = (p_0, v_0, t_0)$ un point quelconque de $\mathbb{R}^{*+3}$. Pourquoi existe-t-il un ouvert $U_0 = I_0 \times J_0 \times K_0$ contenant m_0 sur lequel on peut exprimer t comme fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de p et de v ; *en mathématique on introduit l'application t=a(p,v)* ?
2. Pourquoi existe-t-il un ouvert contenant m_0, sur lequel on peut de plus simultanément écrire v comme fonction de p et de t, et, p comme fonction de v et de t ? *ce que l'on note en mathématiques v=b(p,t) et p=c(t,v).*

---

[1] emprunté à François Rouvière Calcul différentiel CASSINI 1999

[2] la trajectoire d'une planète étant donnée sous la forme $x = a\cos v$ et $y = b\sin v$, $0 \le b \le a$

[3] $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

[4] Par exemple $f(p,v,t) = pv - rt\exp{(-\dfrac{k}{vrt})}$

3. Les physiciens notent parfois $(\frac{\partial t}{\partial p})_v$, la dérivée partielle de t considéré comme application de p et de v, lorsque "v est fixé". Que représente $(\frac{\partial t}{\partial p})_v$ à l'aide des dérivées partielles de l'application a ?

4. Montrer que $(\frac{\partial t}{\partial p})_v \cdot (\frac{\partial v}{\partial t})_p \cdot (\frac{\partial p}{\partial v})_t = -1$.

Chapitre 9

GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Sommaire

9.1 COURS

9.1.1 Introduction

9.1.1.1 Résumé

Nous proposons une étude locale des courbes et des surfaces sous forme paramétrique et définissons la notion de droite tangente à un arc paramétré

et de plan tangent à une nappe paramétrée. Lorsque le paramétrage est de type cartésien nous étudions la position de la "surface" en un point régulier par rapport au plan tangent, généralisant l'étude de la position d'une courbe y=f(x) par rapport à sa tangente. Nous introduisons enfin les équations implicites.

9.1.1.2 Positionnement mathématique

C'est une toute première approche de la géométrie différentielle qui permet essentiellement d'illustrer géométriquement les outils du calcul différentiel.

9.1.2 Paramétrisation d'une courbe

Nous donnons plusieurs descriptions mathématiques de la notion intuitive de courbe et de surface. La première description est liée à la notion de paramétrage, très appropriée à l'étude locale.
On se donne l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ muni de la structure euclidienne canonique. On lui associe l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ en choisissant un point origine O et en associant au vecteur $\overrightarrow{u}$ de E le point M de $\mathcal{E}$ de **rayon vecteur** $\overrightarrow{u}$, c'est à dire tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.

Nous noterons $(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v})$ le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, égale à $(\vec{i}, \vec{j})$ si $n = 2$ et à $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ si $n = 3$. Nous considérons alors le repère orthonormé $(O, \mathcal{B})$ de $\mathcal{E}$.

9.1.2.1 Définitions

On suppose ici que $n = 2$ ou $n = 3$
On se donne un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$ et F une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans E.
F est définie dans la base $\mathcal{B}$ par les applications coordonnées :

$F(t) = (x(t), y(t))$ ou $F(t) = (F_1(t), F_2(t))$ si n = 2 ,
$F(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ou $F(t) = (F_1(t), F_2(t), F_3(t))$ si n = 3.

paramétrisation

Definition 9.1. *courbe de paramétrisation* (I, F)

Soit Γ le sous ensemble de $\mathcal{E}$ formé des points $M(t)$ tel que $\overrightarrow{OM(t)} \in F(I)$, on dit que (I, F) est une ***paramétrisation*** *de Γ, ou que Γ est une courbe de paramétrisation (I, F).*

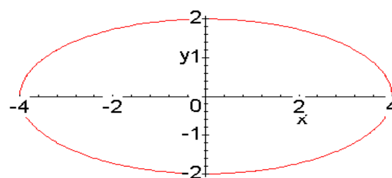
Pour s'assurer de ce que $F(I)$ est localement une courbe au sens intuitif d'image d'un segment de droite ou d'une demi-droite "courbée" par un difféomorphisme et pour faciliter certaines études théorique on étudie F sur des intervalles où F' ne s'annule pas ainsi si $I = [a, c]$ et si F' s'annule en b, on étudie alors séparément les ***arcs de courbe*** *$F([a, b])$ et $F([b, c])$ de paramétrisations $(t \in [a, b] \mapsto F(t))$ et $(t \in [b, c] \mapsto F(t))$.*

Exemple de référence 9.1. ***Droites et Cercles***

$t \in I \mapsto F(t)$	$x(t) = x_a + t(x_b - x_a)$ $y(t) = y_a + t(y_b - y_a)$ $z(t) = z_a + t(z_b - z_a)$	***segment de droite*** $[A, B]$ *si* $I = [0, 1]$ ***droite*** (AB) *si* $I = \mathbb{R}$
$t \in [-\pi, \pi] \mapsto F(t)$	$x(t) = x_a + R\cos\theta$ $y(t) = y_a + R\sin\theta$	*n=2* ***cercle*** *de centre A de rayon R.*

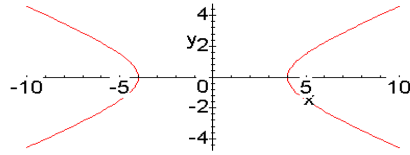
Exemple de référence 9.2. ***Coniques*** *n=2*

Ellipse *de centre O, image du cercle C(O,a) par l'affinité orthogonale d'axe Ox et de rapport $e = b/a$ (e<1). : $t \in I = [0, 2\pi] \mapsto F(t) = (a\cos t, b\sin t)$.*

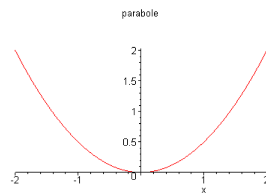


$I = \mathbb{R} \mapsto t \mapsto F(t) = (a\cosh t, b\sinh t$: ***Branche d'hyperbole*** [1] *de centre O d'axe transverse Ox et de demi axe a situé dans le demi plan* $x > 0$.

[1]D'où le nom cosinus et sinus hyperboliques. L'étude d'une figure liée à l'hyperbole équilatère est à la base des correspondances entre trigonométrie circulaire et hyperbolique. C'est l'examen de cette figure qui inspire à Moivre la formule : $(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$



$t \in I = \mathbb{R} \mapsto F(t) = (at, bt^2)$: ***Parabole.***



Exemple de référence 9.3. : ***hélice dans*** $\mathbb{R}^3$
hélice circulaire de pas h $I = \mathbb{R}$ *et* $F(t) = (a\cos t, a\sin t, ht)$.

projection sur xOy cercle	*projection sur yOz : sinusoïde*
dessin perspectif des projections	*représentation à partir des projetés*

9.1.2.2 Courbe paramétrée

Rappelons que la dérivabilité pour une fonction d'une variable réelle a été définie sur un intervalle quelconque I, y compris lorsque I n'est pas ouvert, ce qui permet de prolonger la notion de difféomorphisme d'un intervalle I sur l'intervalle $J = \varphi(I)$ sans nécessairement supposer ces intervalles ouverts.

Definition 9.2. *paramétrisations équivalentes* (I, F)

Deux **paramétrisations** de Γ, (I,F) et (J,G), sont dites **équivalentes** s'il existe un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme φ de I sur J tel que $F = Go\varphi$.

Definition 9.3. *courbe paramétrée*

Soit Γ une courbe de paramétrisation (I, F), on appelle **courbe paramétrée** de paramétrisation (I, F) et on note $(\Gamma, (I, F))$, la classe d'équivalence des paramétrisations équivalentes à (I, F).

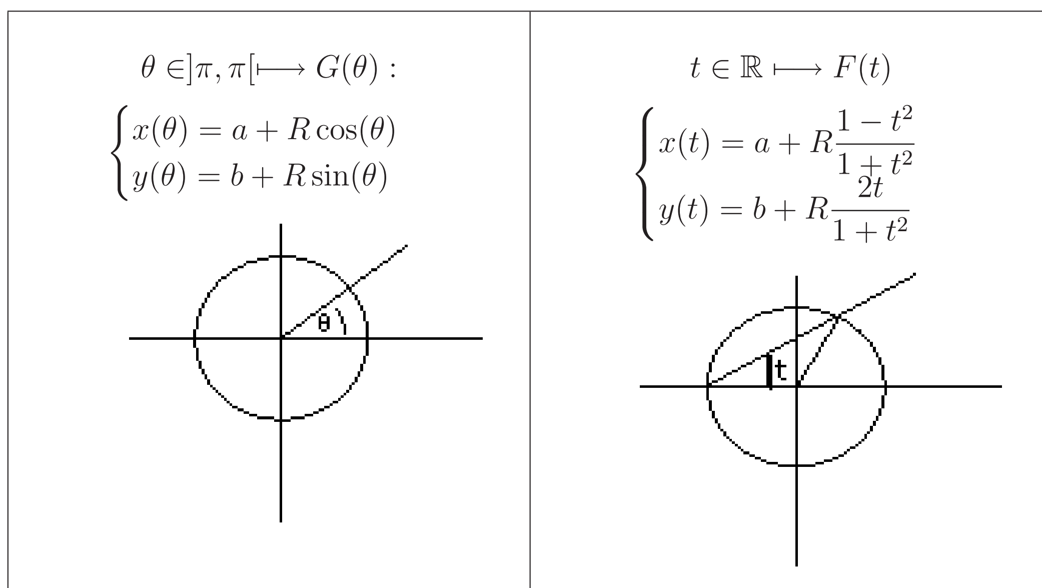
Remarque 9.1.1.
En réalité nous étudierons essentiellement des propriétés inchangées par changement de paramétrisation équivalente à une paramétrisation donnée, il suffit alors de travailler sur une paramétrisation donnée.

Remarquons qu'un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme d'un intervalle I sur un intervalle J φ est nécessairement strictement monotone.

Definition 9.4. *courbe paramétrée orientée*

Le paramétrage (J, G) où $F = Go\varphi$ est dit "de même sens" que le paramétrage (I, F) si φ est strictement croissante. La ***courbe paramétrée orientée*** *$(Gamma, (I, F))$ orienté dans le sens du paramétrage (I, F).*

Exemple 9.1.1.



Vérifier que $F = Go\varphi$ où φ est le $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme croissant de $]\pi, \pi[$ sur $\mathbb{R}$ défini par $\varphi(t) = 2\arctan\theta$.

9.1.2.3 Point régulier. Tangente

On se donne une courbe paramétrée $(\Gamma, (I, F))$ et $M(t_0)$ le point de Γ de rayon vecteur $F(t_0)$,$t_0 \in I$.

Definition 9.5.

*Les **points réguliers** de la courbe paramétrée sont les points de rayon-vecteur $F(t_0)$ avec $F'(t_0) \neq 0$.*

Definition 9.6.

*La courbe paramétrée $(\Gamma, (I, F))$ est **régulière** si tous ses points sont réguliers.*

Definition 9.7.

*La droite affine passant par le point régulier $M(t_0)$ de vecteur directeur $F'(t_0)$ est appelée la **tangente** en $M(t_0)$ à la courbe paramétrée $(\Gamma, (I, F))$.*

Intuitivement
L'arc de courbe paramétrée obtenu pour $t_0 - \alpha \leq t \leq t_0 + \alpha$ a pour représentation paramétrique :

$$t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \mapsto M(t) \quad \overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{OM(t)} + F(t)$$

soit :

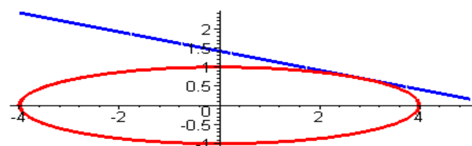
$$\overrightarrow{OM(t)} = F(t_0) + (t - t_0)F'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t - t_0) \quad \underset{\alpha \to 0}{lim}(\varepsilon(t - t_0)) = 0_E$$

La tangente en $M(t_0)$ a pour représentation paramétrique :

$$\lambda \in \mathbb{R} \mapsto P(\lambda) \quad \overrightarrow{M(t_0)P(\lambda)} = \lambda F'(t_0)$$

soit :

$$\overrightarrow{OP(\lambda)} = \overrightarrow{OM(t_0)} + \lambda F'(t_0)$$

Exemple 9.1.2.		Représentation paramétrique et équation cartésienne de la tangente à l'ellipse en $M(t_0) = (a\cos t_0, b\sin t_0)$

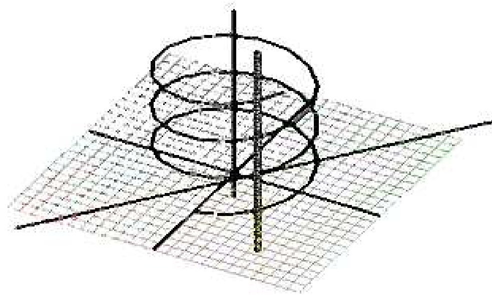
réponse

Représentation paramétrique de la tangente :

$$\lambda \in \mathbb{R} \mapsto P(\lambda) \begin{cases} x(\lambda) = a\cos t_0 - \lambda a \sin t_0 \\ y(\lambda) = b\sin t_0 + \lambda b \cos t_0 \end{cases}$$

Equation[1] de la tangente : $\begin{vmatrix} x(t) - a\cos t_0 & -a\sin t_0 \\ y(t) - b\sin t_0 & b\cos t_0 \end{vmatrix}$=0. Soit $b\cos t_0 x(t) + a\sin t_0 y(t) - ab = 0$.

Exemple 9.1.3.



Montrer que la tangente en un poi quelconque de l'hélice définie par l équations paramétriques

$$t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$$

fait un angle de 45 avec la verticale.

9.1.2.4 Longueur- Paramétrage par l'abscisse curviligne

Nous supposons ici que I est un segment $[a, b]$ avec **a<b** et $(\Gamma, (I, F))$ une courbe paramétrée **régulière** de paramétrisation (I, F), $M(t_i)$ est le point de Γ de rayon vecteur $F(t_i)$.

Definition 9.8.

On appelle ***ligne polygonale*** $[M(t_i)M(t_{i+1})]$, $0 \leq i \leq n$ *inscrite dans l'arc de courbe* Γ, *associée à une subdivision* $t_0 = a, t_1, \cdots t_i, t_{i+1}, \cdots, t_n = b$ *de* $[a, b]$, *la réunion des segments* $[M(t_i)M(t_{i+1})]$ *lorsque* i *décrit* $0, \cdots n$.

Proposition 16.

La longueur de la ligne polygonale $[M(t_i)M(t_{i+1})]$, $0 \leq i \leq n$ *est inférieure ou égale à* $\int_a^b \parallel F'(u) \parallel du$.

Definition 9.9.

La longueur de l'arc de courbe Γ, *est égale à la borne supérieure de la longueur des lignes polygonales* $[M(t_i)M(t_{i+1})]$, $a \leq t_i \leq t_{i+1} \leq b$ *inscrites dans cet arc.*

[1] que vous connaissez depuis longtemps et que nous généraliserons avec la notion d'équation implicite

Proposition 17.

La longueur de l'arc de courbe Γ *est égale à* $\int_a^b \parallel F'(u) \parallel du$.

démonstration. Montrons que c'est une donnée inchangée par changement de paramétrage $\mathcal{C}^1$ équivalent. □

Exemple 9.1.4. Longueur de l'arc de l'hélice $t \longmapsto (x = acost, y = asint, z = bt)$ d'extrémités $(a, 0, 0)$ et $(a, 0, 2\pi b)$.

Definition 9.10.

On appelle ***paramétrisation par abscisse curviligne*** *toute paramétrisation* (J, F) *telle que* $\|F'(s)\| = 1$. *On dit alors que* s *est l'abscisse curviligne.*

Proposition 18.

Toute courbe paramétrée admet une paramétrisation (J, F) *par l'abscisse curviligne. Toute autre paramétrisation est de la forme* $s \mapsto F(a + s)$ *ou* $s \mapsto F(a - s)$.

Remarque 9.1.2. Alors $s(t)$ est égal à la longueur de l'arc de $(\Gamma, (I, F))$ d'extrémités $M(a)$ et $M(t)$. $|s(t_1) - s(t - 2)|$ est égal à la longueur de l'arc de $(\Gamma, (I, F))$ d'extrémités $M(t_1)$ et $M(t_2)$.

Exemple 9.1.5. Quels sont les paramétrages par l'abcsisse curviligne du cercle (exemple 1) ?

9.1.3 Paramétrisation d'une surface

9.1.3.1 Définitions

données
U un ouvert de $\mathbb{R}^2$
F une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U : $(u,v) \in \Omega \mapsto F(u,v) \in \mathbb{R}^3$
Ω est un sous-ensemble ouvert convexe [1] de U
$\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \quad F : ((u,v) \mapsto F(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

Definition 9.11. *paramétrisation* (Ω, F)

*Soit $\Sigma = \{M(u,v) / \overrightarrow{OM}(u,v) = F(u,v) \quad (u,v) \in \Omega\}$, on dit alors que le couple (Ω, F) est **une paramétrisation** de Σ, ou que Σ est une **surface de paramétrisation** F.*

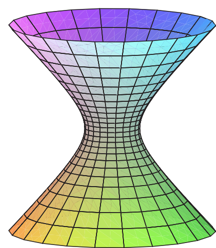
Exemple 9.1.6.

1.Avec Maple représenter la surface de paramétrisation :

$$(u,v) \in]-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \mapsto F(u,v) = cosuchv\vec{i} + sinuchv\vec{j} + shv\vec{k}$$

2. Vérifier que :

$$\forall (u,v) \in]-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \quad x(u,v)^2 + y(u,v)^2 - z(u,v)^2 - 1 = 0$$

	> **with(plots) ;** > **plot3d([cos(u)*cosh(v), sin(u)*cosh(v), sinh(v)], u = -π .. π, v = -2 .. 2, scaling = constrained) ;**

[1]On peut donner des conditions moins strictes

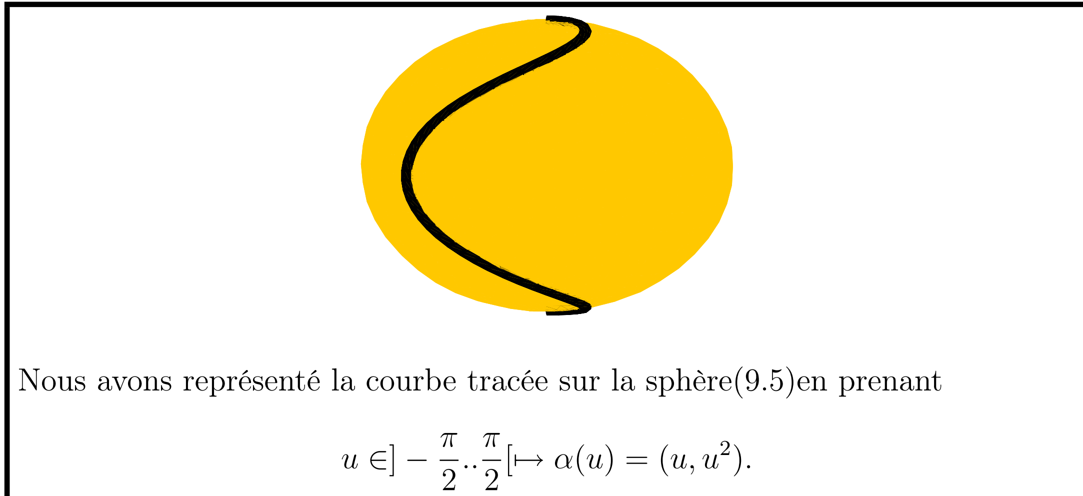
9.1.3.2 Courbes tracées sur une surface

donnée
α application $\mathcal{C}^k$ (k≥1) définie sur un intervalle I à valeurs dans Ω.

$$\begin{array}{lllll} & \alpha & & F & \\ I & \longrightarrow & \Omega & \longrightarrow & \bar{\Sigma} \\ t & \longmapsto & (u(t), v(t)) & \longmapsto & F(u(t), v(t)) \end{array}$$

Definition 9.12.
La courbe de paramétrisation $(I, F o \alpha)$ est dite ***tracée sur la surface*** *de paramétrisation (Ω, F).*

Exemple 9.1.7.

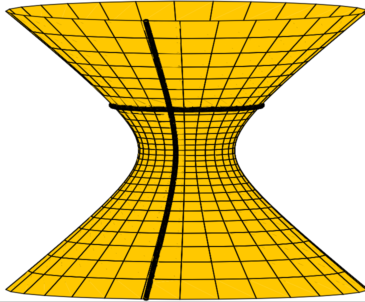


Nous avons représenté la courbe tracée sur la sphère(9.5)en prenant

$$u \in]-\frac{\pi}{2}..\frac{\pi}{2}[\mapsto \alpha(u) = (u, u^2).$$

Definition 9.13.
Dans le cas particulier où α est de la forme $v \in I \longmapsto \alpha(v) = (u_0, v) \in \Omega$, la courbe de paramétrisation $(I, F o \alpha)$ est appelée une ***courbe coordonnée*** *tracée sur la surface de paramétrisation (Ω, F).*

Exercice 9.1.

Reprenons la surface de paramétrisation : $$(u,v) \in]-\pi,\pi] \times \mathbb{R} \mapsto F(u,v)$$ $$F(u,v) = cosuchv\vec{i} + sinuchv\vec{j} + shv\vec{k}.$$ 	1. Nous avons représenté avec Maple une courbe $u \mapsto F(u,v_0)$ et une courbe $v \mapsto F(u_0,v)$. Montrer que ces courbes sont planes. 2. Caractériser ces courbes. Ces courbes coordonnées permettent une visualisation de la surface (procédé de visualisation utilisé par l'ordinateur).

Definition 9.14.

*Les intersections de la surface Σ et des plans horizontaux (d'équation $z = z_0$) sont appelées les **lignes de niveau** de la surface Σ^{ab}*

[b] On définit d'autres types de courbes tracées sur une surface donnée comme les courbes géodésiques (plus court chemin entre deux points) ou les lignes de plus grande pente, les lignes asymptotiques (courbure normale nulle)... en général définies par une condition qui se traduit par une équation différentielle.

9.1.3.3 Exemples fondamentaux

Exemple de référence 9.4.
plan (ABC) ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$) non colinéaires

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \quad (u,v) \in \Omega \mapsto F(u,v) = \overrightarrow{OA} + u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC}$$

Exemple de référence 9.5.
Soit R un réel strictement positif donné.

$$(u,v) \in]-\pi,\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\longmapsto (R\cos v\cos u, R\cos v\sin u, R\sin v)$$

constitue un paramétrage de la sphère de centre O de rayon R privée du demi-grand cercle $y = 0, x < 0$.

	Représentation de la surface $F(\Omega)$, qui coïncide avec la sphère privée du méridien (représenté en rouge) $(\{R\cos v\cos\pi, R\cos v\sin\pi, R\sin v)/v \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\}$

9.1.3.4 Changement de paramétrage

Definition 9.15. *paramétrisations $\mathcal{C}^k$ - équivalentes*

*Deux **paramétrisations** (Ω, F) et (Δ, G) de classe $\mathcal{C}^k$ (k≥1) sont dites $\mathcal{C}^k$ -**équivalentes** s'il existe un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme φ de Ω sur Δ tel que :*
$F = Go\varphi$.

Conséquence.
Le point M de rayon vecteur $F(u_0, v_0)$ a aussi pour rayon vecteur $G(\varphi(u_0, u_0))$.

Definition 9.16.

*Une **surface paramétrée** est la donnée d'une surface et d'une classe d'équivalence de paramétrisations équivalentes de cette surface.*

Remarque 9.1.3.
En réalité nous travaillerons sans toujours le préciser avec les surfaces paramétrées, c'est à dire nous étudierons les propriétés d'une paramétrisation donnée qui sont conservées par changement de paramétrisation équivalente.

Definition 9.17.

*Si de plus le déterminant jacobien du $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ tel que $F = Go\varphi$ est positif sur Ω, nous dirons que les paramétrisations équivalentes (Ω, F) et (Δ, G) ont la **même orientation**.*

[1]

9.1.3.5 Point régulier d'une surface paramétrée

données
$\Sigma = (\Omega, F)$ nappe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$, k≥1. $\bar{\Sigma}$=F(Ω) la surface associée.

[1]interprétation : Le sens du vecteur normal $\partial_1 F(u, v) \wedge \partial_2 F(u, v)$ est invariant dans un changement de paramétrage qui conserve l'orientation

Proposition 19.

Si $F = Go\varphi$ où φ est un difféomorphisme, le rang de J_F est égal à 2 en (u_0, v_0) si et seulement si le rang de J_G est égal à 2 en $\varphi(u_0, v_0)$.

Definition 9.18.

Les points réguliers de la surface paramétrée (Ω, F) sont les points de rayon vecteur $F(u_0, v_0)$ en lesquels la différentielle de F est de rang 2[a]*.*
*La **surface paramétrée** (Ω, F) est **régulière** si tous ses points sont réguliers.*

[a] la matrice jacobienne $JF(u_0, v_0)$ est de rang 2 ou les vecteurs $\partial_1 F(u_0, v_0)$ et $\partial_2 F(u_0, v_0)$ sont indépendants

Rappel :
$\partial_1 F(u, v)$ et $\partial_2 F(u, v)$ sont libres si et seulement si :
$\partial_1 F(u, v) \wedge \partial_2 F(u, v)$ n'est pas égal au vecteur nul.

Exemple 9.1.8. Soit l'exemple (9.1.6), où $\Omega =]-\pi, \pi[\times\mathbb{R}$, et $F(u, v) = cosuchv\vec{i} + sinuchv\vec{j} + shv\vec{k}$. Vérifier que tout point de cette nappe paramétrée est régulier.

9.1.3.6 Plan tangent à une nappe paramétrée

Théorème 9.1. *tangente à une courbe $(I, Fo\alpha)$ tracée sur la surface*

Si t_0 définit un point régulier de la courbe paramétrée $(I, Fo\alpha)$, alors la direction de la tangente en ce point à la courbe paramétrée est dans le plan vectoriel engendré par les dérivées partielles de F en (u_0, v_0).

Definition 9.19.

Si le point de rayon vecteur $F(u_0, v_0)$ est régulier

*1.la surface paramétrée admet un **plan** affine **tangent** en ce point de direction le plan vectoriel engendré par les dérivées partielles de F en (u_0, v_0). Ce plan vectoriel est appelé **le plan vectoriel tangent** à la surface paramétrée en ce point.* [2]
*2 La surface paramétrée admet une **droite** affine **normale** au point de rayon vecteur $F(u_0, v_0)$ qui a pour direction $\partial_1 F(u_0, v_0) \wedge \partial_2 F(u_0, v_0)$. Cette direction est appelée la **direction normale** à la surface paramétrée en ce point.*

Si le paramétrage est injectif, on peut identifier le point de rayon vecteur $F(u_0, v_0)$) et son image M_0.

En conséquence :

- **Équations paramétriques du plan tangent** à la surface F(Ω) en $M_{(u,v)}$ point de paramétre (u,v). Un point P de coordonnées (x, y, z) appartient au plan tangent en $M_{(u,v)}$ à la surface paramétrée $((u, v) \longmapsto F(u, v) = (F_1(u, v), F_2(u, v), F_3(u, v)))$, s'il existe des réels λ et μ tels que :

$$\begin{cases} x &= F_1(u,v) &+\lambda\partial_1 F_1(u,v) &+\mu\partial_2 F_1(u,v) \\ y &= F_2(u,v) &+\lambda\partial_1 F_2(u,v) &+\mu\partial_2 F_2(u,v) \\ z &= F_3(u,v) &+\lambda\partial_1 F_3(u,v) &+\mu\partial_2 F_3(u,v) \end{cases}$$

- **Equation cartésienne**[1] **du plan tangent à la surface** $F(\Omega)$: Un point P de coordonnées (x,y,z) appartient au plan tangent en $M_{(u,v)}$ à la surface si les vecteurs $\overrightarrow{M_{(u,v)}P}$, $\partial_1 F(u, v)$ et $\partial_2 F(u, v)$ sont colinéaires, ce qui équivaut à

$$\left[\overrightarrow{M_{(u,v)}P}, \partial_1 F(u,v), \partial_2 F(u,v)\right] = 0.$$

[2]

$$\begin{vmatrix} x - F_1(u,v) & \partial_1 F_1(u,v) & \partial_2 F_1(u,v) \\ y - F_2(u,v) & \partial_1 F_2(u,v) & \partial_2 F_2(u,v) \\ z - F_3(u,v) & \partial_1 F_3(u,v) & \partial_2 F_3(u,v) \end{vmatrix} = 0$$

- Il est équivalent d'écrire que un point P de coordonnées (x,y,z) appartient au plan tangent en $M_{(u,v)}$ à la surface si et seulement :

$$\left(N(u,v) \mid \overrightarrow{M_{(u,v)}P} \right) = 0$$

où $N(u, v) = \partial_1 F(u, v) \wedge \partial_2 F(u, v)$

Exemple 9.1.9.
$\Omega =]-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$ et F(u,v) = cos u ch v $\vec{i}$ + sin u ch v $\vec{j}$ + sh v$\vec{k}$. Equation cartésienne du plan tangent au point F(u,v) ?

Elément d'aire :
En interprètant $\| \bar{N}(u, v) \| = \| D_1 F(u, v) \wedge D_2 F(u, v) \| \, dudv$ comme l'aire du parallélogramme qui est construit sur $\partial_1 F(u, v)du$ et sur $\partial_2 F(u, v)dv$ au point de paramètres (u, v) :

[1] Equation $ax + by + cz + d = 0$, qui est en fait une équation implicite qui peut se ramener à une équation cartésienne en (x, y) si $c \neq 0$

[2] ou $\left(\partial_1 F(u,v) \wedge \partial_2 F(u,v) \mid \overrightarrow{M_{(u,v)}P} \right) = 0$.

$$\iint_\Omega \| \bar{N}(u,v) \| \, dudv \text{ est l'aire de la surface } F(\Omega)$$

Exemple 9.1.10. Elément d'aire d'une nappe sphérique d'équation :
x(u,v) = r sin u cos v, y(u,v) = r sin u sin v et z(u,v) = r cos u.

9.1.4 Paramétrage cartésien d'une courbe

données

f et g applications au moins continues, que nous supposerons lorsque c'est utile de classe $\mathcal{C}^1$, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Definition 9.20.

*Supposons n=2, (I, F) est une **paramètrisation de type cartésien** si, après permutation éventuelle des vecteurs de base, on peut écrire F sous la forme :*

$$F(x) = x\vec{i} + f(x)\vec{j}$$

*L'équation $y = f(x)$ est alors appelée **équation cartésienne** en x de $F(I)$.*

Definition 9.21.

Supposons n=3, (I, F) est une paramètrisation de type cartésien si, après permutation éventuelle des vecteurs de base, on peut écrire F sous la forme :

$$F(x) = x\vec{i} + f(x)\vec{j} + g(x)\vec{k}$$

L'équation $\begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}$ *est appelée équation cartésienne en x de $F(I)$.*

Proposition 20.
Un paramètrage cartésien est régulier. La tangente au point d'abscisse x_0 est dirigée par le vecteur $(1, f'(x_0))$ si $F(x) = (x, f(x))$
(resp. $(1, f'(x_0), g'(x_0))$ si $F(x) = (x, f(x), g(x))$).

9.1.5 Paramétrisation cartésienne d'une surface

données
$\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ base de E
L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Σ une surface de paramétrisation (Ω, F) où F est de classe $\mathcal{C}^k$.
f une application de Ω dans $\mathbb{R}$ au moins continue (de classe $\mathcal{C}^1$)

9.1.5.1 Définitions

Definition 9.22.

*(Ω, F) est une **paramétrisation de type cartésien** si, après permutation éventuelle des vecteurs de base, on peut écrire F sous la forme :*

$$(x, y) \in \Omega \longmapsto F(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k}$$

*On dit aussi que (Ω, F) est une **représentation cartésienne** de Σ ou que $(x, y) \in \Omega \quad z = f(x, y)$ est une équation cartésienne de Σ.*

9.1.5.2 Plan tangent

Proposition 21. *équation du plan tangent et représentation cartésienne*
Toute surface paramétrée définie par une équation cartésienne est régulière.
Le plan tangent au point $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$ de la surface d'équation cartésienne $z = f(x, y)$ a pour équation :

$$z = z_0 + \partial_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0)(y - y_0)$$

9.1.5.3 Position locale d'une surface par rapport au plan tangent

Théorème 9.2. *position relative locale du plan tangent et de la surface*

On peut déterminer la position locale d'une surface par rapport au plan tangent en un point donné M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) si on en connaît une équation cartésienne $z = f(x, y)$ et si la forme quadratique hessienne de f en (x_0, y_0), $H_f(x_0, y_0)$ est de rang 2 :

1. *Si $H_f(x_0, y_0)$ est définie positive (resp. négative) la surface reste localement en-dessus (resp. au-dessous) du plan tangent en M_0.*
2. *Si $H_f(x_0, y_0)$ change de signe, la surface traverse localement le plan tangent en M_0 avec l'aspect selle de cheval.*

Exemple 9.1.11.
Etudier la position relative du plan tangent au point M_0 de coordonnées

point elliptique signature (2,0) ou (0,2) $f(x,y) = -(x^2+y^2)$ extremum local de f	point hyperbolique . signature (1,1) $f(x,y) = xy$ point selle de f

$(1,1,1)$ à l'hyperboloïde S de représentation paramétrique $(u,v) \mapsto \cos u \cosh v \overrightarrow{i} + \sin u \cosh v \overrightarrow{j} + \sinh v \overrightarrow{k}$ et de S.

1. En remarquant que au voisinage du point M_0, la surface paramétrée admet la représentation cartésienne $z = \sqrt{x^2+y^2-1}$ au point $M_0 = (1,1,1)$
2. étude locale
3. global

	le plan tangent à l'hyperboloïde S d'équation cartésienne $$z = \sqrt{x^2+y^2-1}$$ au point $M_0 = (1,1,1)$ a pour équation $2x+2y-2z-2=0$, il rencontre S en deux droites $\begin{cases} x = z \\ y = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} y = z \\ x = 1 \end{cases}$.

position relative du plan tangent et l'hyperboloïde

Remarque 9.1.4. Si $H_f(x_0, y_0)$ est positive ou négative et a une valeur propre nulle on ne peut conclure de manière générale sur la position relative locale du plan tangent et de la surface en (x_0, y_0). Cette intersection peut localement avoir beaucoup d'aspect différents.

Exemple 9.1.12. diversité de forme de contact entre surface et plan

f(x,y)=x^2, signature (1,0)	$f(x,y) = x(x^2 - y^2)$ signature (0,0) "selle de singe"	$f(x,y) = x^2y^2$ signature (0,0)

9.1.6 Equation implicite d'une courbe

9.1.6.1 En dimension 2

Soit h une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{n-1}$ avec $n = 2$ puis avec $n = 3$, par exemple $h(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1$. Dans ce cas la relation $h(x, y) = 0$ définit une ellipse que vous savez être une courbe.

Definition 9.23. *cas n=2*

*L'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) tels que $h(x, y) = 0$ définit la **courbe d'équation implicite** $h(x, y) = 0$.*

Dans le cas général on ne peut pas toujours passer de la relation implicite $h(x, y = 0$ à une relation explicite du type $y = \varphi(x)$ ou $x = \varphi(y)$? Il faut déterminer en s'appuyant sur le théorème des fonctions implicites les points (a, b) au voisinage desquels cela est possible sans avoir à calculer φ. On "zoom" au voisinage du point (a, b) et on approche $h(x, y)$ par une expression linéaire pour obtenir cette condition. On sait alors déterminer la tangente la courbe en ce point.

Definition 9.24.

*Le point M_0 de coordonnées (x_0, y_0) de la courbe d'équation implicite $h(x, y) = 0$ est appelé un **point régulier** de cette courbe si le gradient de h en (x_0, y_0), $\nabla h(x_0, y_0)$, n'est pas nul[a].*

[a] ou, ce qui est équivalent, si la matrice jacobienne de h en (x_0, y_0) est de rang 1

Exemple de référence 9.6. *: équations réduites des coniques en dimension 2*

$x \in \mathbb{R} \quad y \in \mathbb{R} \quad h(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a = 4, b = 2, c = 2\sqrt{3}$$ équation de l'ellipse de centre O l'origine du repère et de demi-axes a et b si $a > b > 0$ l'axe focal est (Ox), les foyers F et F'($\pm c$, 0) avec $c^2 = a^2 - b^2$	
$x \in \mathbb{R} \quad y \in \mathbb{R} \quad h(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$ $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a = 4, b = 2, c = 2\sqrt{5}$$ équation de l'hyperbole de centre O, l'origine du repère, de sommets ($\pm$a,0), d'asymptotes les droites dont la réunion a pour équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ l'axe focal (ou transverse) est (Ox), les foyers ($\pm c$, 0) avec $c^2 = a^2 + b^2$	
$x \in \mathbb{R} \quad y \in \mathbb{R} \quad h(x,y) = y^2 - 2px$ $$y^2 \quad = \quad 2px \quad p = 2$$ équation de la parabole de sommet l'origine, de paramètre p l'axe focal est (Ox), le foyer $(p, 0)$	

[1]

[1]**définition bifocales** des coniques à centre :ellipse : ensemble des points M tels que $MF + MF' = 2a$,hyperbole : ensemble des points M tels que $|MF - MF'| = 2a$ **définition**

rappel
On appelle gradient de h en (x_0, y_0) le vecteur noté grad$h(x_0, y_0)$ ou $\nabla h(x_0, y_0)$ de coordonnées $\partial_1 h(x_0, y_0), \partial_2 h(x_0, y_0), \partial_3 h(x_0, y_0))$. La matrice colonne de ce vecteur est la tranposée de la matrice jacobienne de h en (x_0, y_0).

Proposition 22.

En tout point régulier M_0 de coordonnées (x_0, y_0) la courbe d'équation implicite $h(x, y) = 0$ admet une tangente.
La droite affine tangente à cette courbe en un point régulier M_0 de coordonnées (x_0, y_0) est la droite passant par M_0 qui est normale au vecteur $\nabla h(x_0, y_0)$; elle a pour équation :

$$\left(\nabla h(x_0, y_0) \,|\, \overrightarrow{M_0 M} \right) = 0$$

soit :

$$\partial_1 h(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_2 h(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

Exemple 9.1.13. Equation de la tangente en (x_0, y_0) à une conique

9.1.6.2 en dimension 3

Definition 9.25. *cas n=3*
L'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) tels que $h(x, y, z) = (h_1(x, y, z), h_2(x, y, z)) = (0, 0)$ définit une courbe Γ appelée ***courbe d'équation implicite*** $h_1(x, y, z) = 0$ *et* $h_2(x, y, z) = 0$.

Exemple de référence 9.7. *Cas d'une droite définie comme intersection de deux plans sécants, soit $h(x, y, z) = (ax+by+cz+d, a'x+b'y+c'z+d') = (0, 0)$ avec la condition le rang de la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ est 2.*

9.1.7 Equation implicite d'une surface

données
h application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$
$\mathcal{S}$ l'ensemble des points de l'espace $\mathcal{E}$, rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, de coordonnées (x, y, z) tels que $h(x, y, z) = 0$.

Definition 9.26.

Nous dirons que $\mathcal{S}$ est la ***surface d'équation implicite h(x,y,z)=0***

---

par foyer et directrice des coniques ensemble des points M tels que $MF = ed(M, (\Delta))$
$e = 1$ parabole, $e < 1$ ellipse, $e > 1$ hyperbole

Exemple de référence 9.8. *L'équation usuellement appelée cartésienne du plan de vecteur normal* $N = (a, b, c)$ *passant par le point* (x_0, y_0, z_0) *écrite sous la forme* $ax + by + cz + d = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ *est en réalité une équation de type implicite.*

Théorème 9.3. *point régulier et plan tangent*

Un point M_0 *de* $\mathcal{S}$ *de coordonnées* (x_0, y_0, z_0) *est dit régulier si le vecteur* $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$ *n'est pas nul.*
Le plan tangent à $\mathcal{S}$ *en un point régulier* M_0 *de coordonnées* (x_0, y_0, z_0) *est le plan passant par* M_0 *qui est normal au vecteur* $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$ *il a pour équation :*

$$\left(\nabla h(x_0, y_0, z_0) \mid \overrightarrow{M_0 M} \right) = 0$$
$$\partial_1 h(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \partial_2 h(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \partial_3 h(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Remarque 9.1.5. Une nappe de paramétrage cartésien $(x, y) \in \quad \Omega \mapsto F(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k}$ admet l'équation implicite $h(x, y, z) = 0$ avec $h(x, y, z) = z - f(x, y)$.

9.1.8 Surfaces de révolution-Surfaces réglées

9.1.8.1 Surfaces de révolution

Definition 9.27.

Une ***surface de révolution*** *est une surface* Σ *obtenue en faisant tourner une courbe plane* Γ*, appelée méridienne, autour d'un axe contenu dans son plan appelé axe de la surface.*

Théorème 9.4. *cas*

Si Γ *est contenue dans le demi-plan* $x > 0$ *du plan* (xOz) *et définie par une représentation paramétrique* $(I, G = (G_1, 0, G_2))$*, alors la surface de révolution de méridienne* Γ *et d'axe* Oz*, admet pour paramétrage* (Ω, F) *défini par :*

$$\Omega = I \times \mathbb{R} \quad (u, v) \in \Omega \qquad g(u, v) = (G_1(u)cosv, G_1(u)sinv, G_2(u))$$

démonstration. M $\in$ S $\Leftrightarrow \quad \exists u \in I \exists v \in \mathbb{R}$ tel que :
$\overrightarrow{OM} = R_v(G_1(u)\vec{i} + G_2(u)\vec{k}) = \mathrm{f}_1\ (\mathrm{u})\mathrm{R}_v(\vec{i}) + \mathrm{G}_2\ (\mathrm{u})\mathrm{R}_v(\vec{k})$
$\overrightarrow{OM} = G_1(u)(cosv\vec{i} + sinv\vec{j}) + G_2(u)\vec{k} = (G_1(u)cosv\vec{i} + G_1(u)sinv\vec{j}) + G_2(u)\vec{k}$

ce qui peut s'écrire matriciellement

$$\begin{pmatrix} cosv & -sinv & 0 \\ sinv & cosv & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1(u) \\ 0 \\ G_2(u) \end{pmatrix}$$

□

Exemple 9.1.14.
Représentation paramétriques du tore :

$(u, v) \mapsto (cos(u)*(8+(1/2)*cos(v)), sin(u)*(8+(1/2)*cos(v)), (1/2)*sin(v))$

Pour obtenir une équation implicite de la surface de révolution il suffit d'éliminer u dans le système

$$x^2 + y^2 = G_1^2(u) \text{ et } z = G_2(u)$$

Théorème 9.5. *cas*

Une surface d'équation implicite $h(x^2+y^2, z) = 0$ est une surface de révolution d'axe (Oz) de méridienne la courbe du plan (xOz) d'équation implicite

$$h(x^2, z) = 0 \; et \; y = 0.$$

démonstration.
Pour tout point $(x, 0, z)$ de la méridienne, le cercle d'équation $X^2+Y^2+Z^2 = x^2 + z^2$ et $Z = z$ est inclus dans la surface. □

Exemple 9.1.15.
L'hyperboloïde d'équation implicite $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ est une surface de révolution engendrée par rotation autour de (Oz) de l'hyperbole d'équation $x^2 - z^2 = 1$ et $y = 0$

9.1.8.2 Surfaces règlées

9.1.8.3 Définition générale

Introduction : Une surface réglée est une surface "entièrement formée de droites : elle peut être engendrée par une famille de droites dépendant d'un paramètre

[1] : Fabriquer un voile de béton armé, les tiges métalliques se raccordant. Toutes les surfaces réglées sont intéressantes en architecture car elles peuvent être coulées en béton dans des coffrages en planches. Double transmission ...

Exemple de référence 9.9.
Les cylindres et les cônes sont des surfaces réglées particulières obtenues pour une famille de droites parallèles à une direction donnée (resp. passant par un point donné).

UNE SURFACE RÉGLÉE non orientable	
Ce ruban est une surface fermée qui n'a qu'une face	contrairement à un ruban classique qui en possède deux.

Exemple 9.1.16 (***Le ruban de Möbius(1858)***)**.**

$$(u, v) \mapsto (2 + u \cos v) \cos 2v, (2 + u \cos v) \sin 2v, u \sin v], u = -1..1, v = 0..\pi$$

Definition 9.28. *(ensembliste)*

Une ***surface*** *Σ est* ***réglée*** *si par tout point de cette surface passe (au moins) une droite entièrement contenue dans Σ.*

Proposition 23. *paramétrage d'une surface réglée*

Si Σ admet une paramétrisation (Ω, f) de la forme $\Omega = I \times \mathbb{R}$ avec :

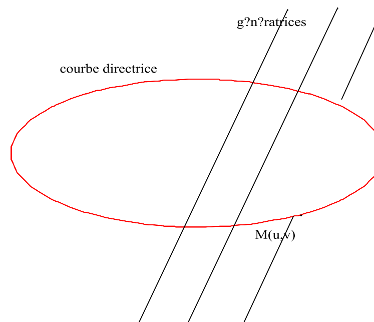
$$(u, v) \in I \times \mathbb{R} \longmapsto f(u, v) = g(u) + vh(u)$$

où g et h sont des applications continues de I dans $\mathbb{R}^3$ telles que h ne s'annule pas sur I alors la surface Σ est réglée.

démonstration.
En effet la courbe coordonnée Δ_0 de paramétrage $(v \in \mathbb{R} \mapsto g(u_0) + vh(u_0))$ tracée sur Σ est une droite affine de vecteur directeur $h(u_0)$. $\square$

Definition 9.29.

*Soit Σ une surface réglée de paramétrage $(u,v) \longmapsto f(u,v) = g(u) + vh(u)$. La courbe coordonnée Δ_0 de paramétrage $(v \in \mathbb{R} \mapsto g(u_0) + vh(u_0))$ tracée sur Σ est une droite appelée **génératrice rectiligne** de la surface. Pour tout réel v_0, la courbe coordonnée tracée sur Σ de paramétrage $(u \in I \mapsto g(u) + v_0 h(u))$ est appelée une **courbe directrice** de Σ.*



Proposition 24.

En un point régulier d'une nappe réglée, toute génératrice de la surface passant par ce point est située dans le plan tangent à la surface en ce point[a].

[a] Dans le cas où le plan tangent est le même le long de chaque génératrice on dit qu'on a une **surface réglée développable**.

preuve en cours.

9.1.8.4 Surfaces réglées cylindriques

Une surface cylindrique Σ est une surface réglée dont les génératrices sont parallèles à une droite donnée D.

Definition 9.30.

*On appelle **surface cylindrique** Σ **de courbe directrice** γ **et de direction vect** $\vec{W}$ l'ensemble des droites s'appuyant[3] sur γ et de vecteur directeur $\vec{W}$.*

c'est à dire passant par un point de γ.

Théorème 9.6. *équation paramétrique d'une surface cylindrique*

Supposons γ défini par un paramétrage (I, G) alors la surface est définie par le paramétrage (Ω, F) avec

$$\Omega = I \times \mathbb{R}\, et\, F(u, v) = G(u) + v\vec{W}$$

Théorème 9.7. *:*

Une surface est un cylindre de direction $\vec{k}$ si et seulement si elle a une équation de la forme $h(x, y) = 0$. C'est aussi l'équation implicite de la courbe intersection du plan (xOy) avec la surface.

9.1.8.5 Surfaces réglées coniques

notion de base :
Une surface conique (ou cône) est une surface réglée dont les génératrices passent par un point donné S appelé sommet du cône.

Definition 9.31.

Une ***surface conique de directrice*** *γ* ***de sommet S*** *est la surface ensemble des droites s'appuyant sur γ (c'est à dire passant par un point de γ) et passant par S.*

Proposition 25. *équation paramétrique d'une surface conique*
Supposons γ défini par un paramétrage (I,G) alors la surface de directrice γ et de sommet S est définie par le paramétrage (Ω,g) avec :

$$\Omega = I\times\mathbb{R} \text{ et } F(u,v) = s + v\,(G(u) - s)$$

Théorème 9.8. *:*

Une surface est un cône de sommet O si et seulement si elle a une équation de la forme $h(x, y, z) = 0$ où h est une fonction homogène de x,y et z, c'est à dire vérifie la propriété :

$$h(x, y, z) = 0 \Rightarrow \forall\lambda \in \mathbb{R} \quad h(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 0$$

9.2 EXERCICES

9.2.1 Courbes paramétrées

9.2.1.1 apprentissage du cours

Exercice 9.2.
Soit l'arc paramétré Γ =($\mathbb{R}$,F), F(t)= (t, t^2). Tracer la courbe F($\mathbb{R}$). Calculer la longueur de l'arc de courbe fermé F([-1,1]) Soit l'arc paramétré Γ =($\mathbb{R}$,F)où F(x)= (x, y(x)=f(x),z(x)=0). Calculer la longueur de l'arc de courbe fermé F([-1,1])

Exercice 9.3.
Soit la courbe de représentation paramétrique

$$u \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x = a \\ y = bu \\ z = \frac{s}{2}(1 - u^2) \end{cases}$$

où a et b et s sont des constantes non nulles

1. Reconnaître la nature de cette courbe, la dessiner pour a=1,b=1,s=2
2. Déterminer la tangente à cette courbe au point de paramètre $u = 1$ [1]

Exercice 9.4.
On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = y - \frac{5}{9}(x-2)^2 - 4 \\ y' = \frac{10}{3}(x-2) \end{cases}$$

1. Vérifier que ce système a un point d'équilibre.
2. Vérifier que ce système admet une solution et une seule définie sur un intervalle de la forme $[0, \alpha]$, qui prend la valeur $(2, 7)$ en 0 et que $x(t) = 3t + 2$.
3. Tracer la trajectoire de cette solution, préciser le sens de parcours en fonction du temps et la nature de cette courbe.

Exercice 9.5.
annales : exercice 27 page 78.

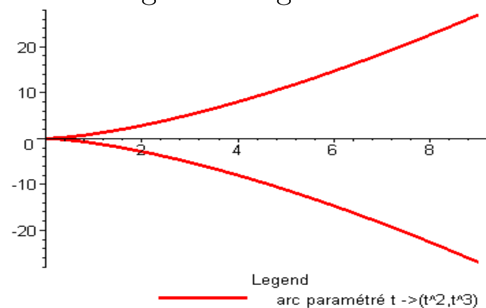
[1] facultatif Calculer la circulation -acquis OMSI première année-du champ de vecteurs V (x,y,z)$\longmapsto$ (y^3,x+3y^2x,xz) le long de cette courbe orientée dans le sens croissant du paramètre u.

9.2.1.2 pour en savoir plus

Exercice 9.6.
On se propose de dessiner l'allure de la courbe plane définie par la représentation paramétrique $I = \mathbb{R} \mapsto F(t) = (t^2, t^3)$ autour du point de paramétre 0.
Vérifier que (0,(0,0)) n'est pas un point régulier de l'arc paramétré (t^2, t^3)
Justifier l'allure de chacun des arcs $I =]-\infty, 0[\mapsto F(t) = (t^2, t^3)$ et

$$I =]0, +\infty[\mapsto F(t) = (t^2, t^3)$$

au voisinage de l'origine.



Ce type de point non régulier est appelé point de rebroussement de première espèce

9.2.2 Surfaces paramétrées

9.2.2.1 pour aller plus loin

Exercice 9.7.

L'espace affine euclidien est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
On considère la surface (Σ) définie par la représentation paramétrique (Ω, F) où $\Omega = \mathbb{R} \times]0, \frac{\pi}{2}[$ définie par :

$$(\lambda, \theta) \in \Omega \mapsto F(\lambda, \theta) = a(\cos\theta - (\lambda-\theta)\sin\theta)\vec{i} + a(\sin\theta + (\lambda-\theta)\cos\theta)\vec{j} + a\lambda\vec{k}$$

1. Quelle est la nature des courbes coordonnées $\theta = \theta_0$

2. Déterminer les points singuliers de (Σ) et vérifier qu'ils constituent une courbe tracée sur le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = a^2$
3. Soit Γ la courbe de représentation paramétrique (I, G) où $I = [0, \frac{\pi}{2}]$

définie par :

$$\theta \in I \mapsto G(\theta) = a\cos\theta\vec{i} \quad + \quad \sin\theta\vec{j} \quad + \quad \theta\vec{k}$$

3.1. Ecrire une représentation paramétrique de la surface (S) constituée de l'ensemble des tangentes à la courbe
(Γ) et vérifier que (S)=(Σ) en précisant le difféomorphisme qui lie les deux représentations paramétriques.

3.2. Montrer que ces tangentes forment un angle constant avec le plan (xOy).

4. On considère la portion (Σ_1) de la surface (Σ) constituée des segments des tangentes à la courbe (Γ) limités d'un côté par (Γ) et de l'autre par le plan (xOy).

4.1. Dessiner (Σ_1) : on représentera les bords de (Σ_1), c'est à dire les courbes coordonnées θ =0, θ =$\pi/2$, la courbe (Γ) et l'allure de l'intersection de (Σ_1) et du plan (xOy)).

4.2. Calculer l'aire de (Σ_1).

Exercice 9.8.
Annales : *paramétrage cartésien* exercice 30 page 81.

Exercice 9.9.

Soient a et r deux réels strictement positifs tels que $a < r$ et la surface paramétrée $(\mathbb{R}^2, F)$ où F est définie par :

$$(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto F(u,v) = ((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\sin v, r\sin u)$$

1. Déterminer les points singuliers de la surface paramétrée $(\mathbb{R}^2, F)$.
2. Déterminer la nature des courbes coordonnées de cette surface.
3. Donner l'allure de cette surface.
4. Vérifier que cette surface admet pour équation implicite $(x^2+y^2+z^2-a^2-r^2)^2 = 4a^2(r^2-z^2)$.
5. Donner une représentation paramétrique et une équation implicite du plan tangent au point $M(0,0)$.

9.2.2.2 Application aux courbes planes et surfaces

Exercice 9.10. Soit la surface[1] d'équation implicite $x^2 - y^2 - az = 0$, où a est un réel non nul.

1. Ecrire l'équation du plan tangent à cette surface en A$(5a, 4a, 9a)$
2. Montrer que l'intersection de ce plan et de la surface est constituée de deux courbes dont on donnera la nature

Exercice 9.11. On considère la surface (Σ) donnée par l'équation implicite : $e^{(x+y-z)} - xyz + 1 = 0$.

1. Montrer que dans un voisinage du point $A(1,1,2)$, (Σ) admet une représentation cartésienne de la forme : $(x,y) \in V \quad z = \phi(x,y)$ où $V =]1-\alpha_,1+\alpha_1[\times]1-\alpha_2+\alpha_2[$
2. Calculer les dérivées partielles de premier ordre de ϕ sur $]1-\alpha_,1+\alpha_1[\times]1-\alpha_2+\alpha_2[$
3. Donner une approximation à l'ordre 2 de $\phi(x,y)$ au voisinage de $(1,1)$
4. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

9.2.2.3 pour aller plus loin

Exercice 9.12. *equations implicites d'une courbe*
Soit f de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par ses composantes f_1 et f_2 :

$$f_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$$
$$f_2(x,y,z) = x^2 + 3xy - 2y$$

1. Montrer que l'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage du point (1,-1,1).

2. Exprimer au voisinage de ce point (y,z) sous la forme $(y,z) = \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$. Quel résultat donne ici le théorème des fonctions implicites et qui n'est pas obtenu en appliquant seulement le théorème général sur la tangente à une courbe tracée sur une surface ?

9.2.3 Surfaces de révolution, cônes et cylindres

9.2.3.1 apprentissage du cours

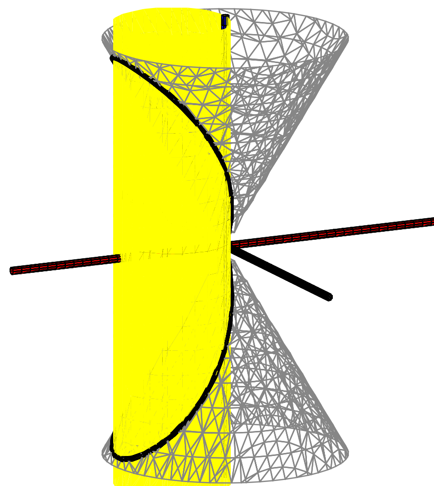
Exercice 9.13. Etant donnée la courbe de représentation paramétrique t $\in \mathbb{R} \quad \longmapsto$ (x = t^2-1 y = 2t z = t^2+t+1).

[1]C'est une quadrique

Donner des équations cartésiennes de cette courbe.
Montrer que cette courbe est une courbe plane tracée sur un cylindre.
Préciser la nature de cette courbe

Exercice 9.14. Donner une représentation paramétrique de l'hyperpoloïde à une nappe(donnée en cours) et montrer que cette surface est réglée

Exercice 9.15. *Du paramétrique à l'implicite*
Soit la courbe de représentation paramétrique :
$t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longmapsto (x = a \cos^2 t,\ y = a \cos t \sin t$ et $z = \sqrt{3} \cos t)$ où a est un paramètre réel donné.
Montrer que cette courbe est tracée sur un demi-cône de révolution d'axe Oz.
Montrer que cette courbe est tracée sur un cylindre de révolution d'axe parallèle à Oz.
Tracer cette courbe.
Cette courbe admet-elle une représentation paramétrique de paramétre x ?



Exercice 9.16. Soit S la surface d'équation implicite $x^2 + y^2 - ch^2 z = 0$.

1. Montrer que S est une surface de révolution d'axe Oz.
2. Déterminer sa section par le plan xOz. La dessiner puis dessiner S.
3. Déterminer une équation du plan tangent à S au point A $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$.
4. Indiquer une représentation paramétrique de Σ.

9.2.3.2 pour aller plus loin

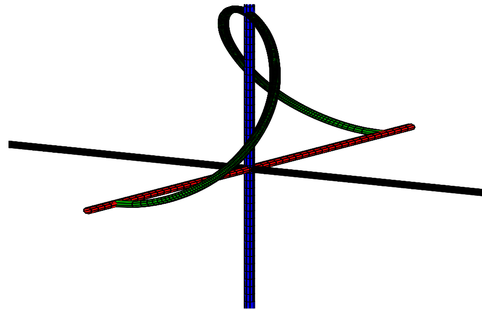
Exercice 9.17. *Fenêtre de Viviani de l'implicite au paramétrique*

1. En quels points de la courbe (γ) définie par les équations :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + z^2 - z = 0 \end{cases} \tag{9.1}$$

   Est-il possible de donner localement une représentation paramétrique régulière en fonction du paramètre x ?
2. Montrer que la courbe (γ) est réunion de deux arcs (γ_1) et (γ_2) sur lesquels x est un paramètre admissible.
3. Tracer l'arc qui a pour représentation paramétrique

$$x \longmapsto (x, x\sqrt{1-x^2}, 1-x^2)$$

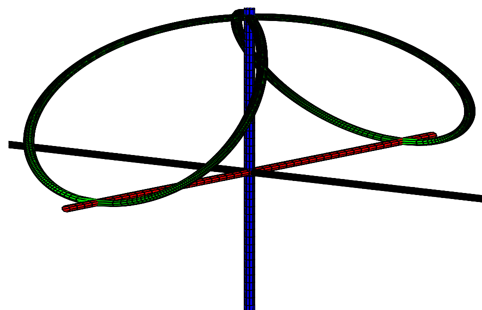


4. Montrer que cet arc admet pour représentation paramétrique :

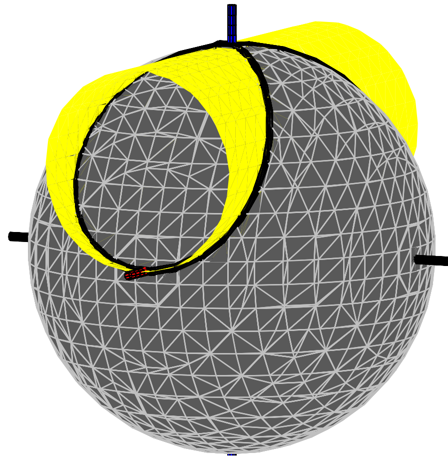
$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \qquad \longmapsto (x = \sin t \qquad y = \sin t \cos t \qquad z = \cos^2 t)$$

5. Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de la longueur de cet arc.
6. Montrer que la courbe (γ) est une courbe qui admet pour représentation paramétrique :

$$0 < t < 2\pi \qquad \longmapsto (x = \sin t \qquad y = \sin t \cos t \qquad z = \cos^2 t)$$



7. Donner une représentation paramétrique de la portion de sphère, appelée fenêtre de Viviani, délimitée par la courbe la courbe (γ) et en déduire l'aire de cette surface.



8. Dessiner la fenêtre de Viviani d'une part après avoir précisé quelques points et placé la tangente en ces points et d'autres part après avoir tracé la surface d'équation implicite $y^2 + z^2 - z = 0$ et la sphère de centre l'origine et de rayon 1.